$a_1 = \dfrac{1}{6}$, $\dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{a_{n-1}} + 3(n^2+n)$ $(n = 2, 3, 4, \cdots)$ を満たす数列 $\{a_n\}$ について,

(1) a_n を n の式で表せ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ の n 項の和 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ を求め, 無限級数の和 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ を求めよ。

〔鳥取大〕

(1) $\dfrac{1}{a_n} = b_n$ とすると

$b_n - b_{n-1} = 3(n^2+n)$ 　　$\dfrac{1}{a_1} = 6 = b$

つまり

$b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n} 3(k^2+k)$ であるが $n \geqq 2$ なので 初項の6は和から引かなくてはいけない.

$\therefore$ $b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n} 3(k^2+k) - 6$

$= \cancel{6} + 3\left\{\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + \dfrac{1}{2}n(n+1)\right\} - \cancel{6}$

$= \dfrac{1}{2}n(n+1)(2n+1) + \dfrac{3}{2}n(n+1) = \dfrac{1}{2}n(n+1)(2n+4)$

$= n(n+1)(n+2)$

$\therefore$ $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$ で $n=1$ のときも成り立つ

(2)

$a_n = \dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{1}{n(n+1)} - \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}$ となり 和を S_n とすると

$S_n = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1\cdot 2} - \cancel{\dfrac{1}{2\cdot 3}}\right) + \dfrac{1}{2}\left(\cancel{\dfrac{1}{2\cdot 3}} - \cancel{\dfrac{1}{3\cdot 4}}\right) + \cdots + \dfrac{1}{2}\left\{\cancel{\dfrac{1}{n(n+1)}} - \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}$

$= \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2(n+1)(n+2)}$

$\therefore$ $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left\{\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2(n+1)(n+2)}\right\} = \dfrac{1}{4}$

$\dfrac{1}{4}$