数列と極限 式い

次の式で与えられた2つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ について，下の問いに答えよ。

$$\{a_n\}: a_1 = 2, a_{n+1} = \sqrt{a_n}\,(n \geqq 1),\ \{b_n\}: b_1 = 1, b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + 2\,(n \geqq 1)$$

(1) a_n，b_n を n の式で表せ。

(2) $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n)$ を求めよ。

〔東北工大〕

(1) $a_{n+1} = a_n^{\frac{1}{2}}$

$\log_2 a_{n+1} = \frac{1}{2}\log_2 a_n$ となり $\log a_n$ は 公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列．$\log a_1 = \log 2$

$\therefore \log_2 a_n = \log_2 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\log_2 a_n = \log_2 2^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$ $\therefore$ $\underline{a_n = 2^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}}$

特性方程式

$2x = x + 4$ より $x = 4$ より

$b_{n+1} - 4 = \frac{1}{2}(b_n - 4)$ となり 数列 $b_n - 4$ は 初項 -3 公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列

$\therefore b_n - 4 = -3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ $\therefore$ $\underline{b_n = -3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 4}$

(2)

$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim_{n\to\infty}\left\{-3\cdot\underbrace{2^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}}_{1}\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}_{0} + 4\cdot\underbrace{2^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}}_{1}\right\} \quad \cdots ①$$

ここで $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$ $\lim_{n\to\infty} 2^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}} = 1$ より ①は

$\underline{\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = 4}$