(1) 関数 $f(x)=\dfrac{-2x+3}{2x-7}$ において, $f(x)=x$ となる x の値を求めよ。

(2) (1) で得られた x の 2 つの値を $a,\ b\ (a<b)$ とするとき, $\dfrac{f(x)-a}{f(x)-b}=k\dfrac{x-a}{x-b}$ を満たす定数 k の値を定めよ。

(3) 関係式 $a_1=1,\ a_n=\dfrac{-2a_{n-1}+3}{2a_{n-1}-7}\ (n \geqq 2)$ で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n , および極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

〔信州大〕

(1)

$\dfrac{-2x+3}{2x-7}=x$ 　 $-2x+3=2x^2-7x$

$2x^2-5x-3=0$ 　 $(x-3)(2x+1)=0$ 　 $\therefore x=3,\ -\dfrac{1}{2}$

(2) $a<b$ より　$a=-\dfrac{1}{2},\ b=3$

$$\frac{\frac{-2x+3}{2x-7}+\frac{1}{2}}{\frac{-2x+3}{2x-7}-3}=\frac{-2x+3+\frac{1}{2}(2x-7)}{-2x+3-3(2x-7)}=\frac{-4x+6+2x-7}{-4x+6-12x+42}=\frac{-2x-1}{-16x+48}=\frac{-2(x+\frac{1}{2})}{-16(x-3)}$$

$$=\frac{1}{8}\cdot\frac{x+\frac{1}{2}}{x-3}=\frac{1}{8}\cdot\frac{x-a}{x-b}$$

$\therefore k=\dfrac{1}{8}$

(3) $a_n=f(a_{n-1})$ より $(n\geqq 2)$ と (2) から

$$\frac{a_n+\frac{1}{2}}{a_n-3}=\frac{1}{8}\cdot\frac{a_{n-1}+\frac{1}{2}}{a_{n-1}-3}$$

数列 $\dfrac{a_n+\frac{1}{2}}{a_n-3}$ は初項 $-\dfrac{3}{4}$ 公比 $\dfrac{1}{8}$ の等比数列

$$\frac{a_n+\frac{1}{2}}{a_n-3}=-\frac{3}{4}\left(\frac{1}{8}\right)^{n-1} \to a_n+\frac{1}{2}=-\frac{3}{4}\left(\frac{1}{8}\right)^{n-1}a_n+\frac{9}{4}\left(\frac{1}{8}\right)^{n-1}$$

$$a_n\left\{1+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{8}\right)^{n-1}\right\}=\frac{9}{4}\left(\frac{1}{8}\right)^{n-1}-\frac{1}{2} \qquad \therefore a_n=\frac{\frac{9}{4}\left(\frac{1}{8}\right)^{n-1}-\frac{1}{2}}{1+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{8}\right)^{n-1}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{9}{4}\left(\frac{1}{8}\right)^{n-1}-\frac{1}{2}}{1+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{8}\right)^{n-1}}=-\frac{1}{2} \qquad \lim_{n\to\infty}a_n=-\frac{1}{2}$$