漸化式 15　　訂正あり

$a_1 = a,\ a_2 = b,\ 3a_{n+2} - 5a_{n+1} + 2a_n = 0\ (n \geqq 1)$ で定義された数列 $\{a_n\}$ がある。

(1) 一般項 a_n を，$a,\ b,\ n$ の式で表せ。

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 9$ となるように $a,\ b$ を定めよ。

〔広島大〕

(1) 特性方程式

$3x^2 - 5x + 2 = 0$ をとく

$$\begin{matrix} 1 & & -1 & \to -3 \\ 3 & & -2 & \to -2 \end{matrix}$$

$(x-1)(3x-2) = 0$.　　$x = 1,\ \frac{2}{3}$

また式は

$a_{n+2} - \frac{5}{3}a_{n+1} + \frac{2}{3}a_n = 0$ となり

$a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{2}{3}(a_{n+1} - a_n)$ と変形できる.

これは数列 $a_{n+1} - a_n$ が初項 $a_2 - a_1 = b - a$ 公比 $\frac{2}{3}$ の等比数列であることを表す.

$\therefore\ a_{n+1} - a_n = (b-a)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

従って

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(b-a)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$= a + (b-a)\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}}{1-\frac{2}{3}}$$

$$= a + 3(b-a)\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}$$ であるから

$$a_n = 3b - 2a - 3(b-a)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$　($\because a_1 = a$)

(2) $$\sum_{n=1}^{n} a_n = (3b-2a)n - 3(b-a)\left\{\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}}\right\}$$

$$= (3b-2a)n - 9(b-a)\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}$$

$n \to \infty$ にしたときに和をもつためには $3b - 2a = 0$ で その和が9になるとき $b - a = -1$ である.

$\begin{cases} 3b - 2a = 0 \\ b - a = -1 \end{cases}$ を解くと.

$\underline{a = 3\quad b = 2}$