数列 $\{a_n\}$ の項の間に, 次の関係があるとする。

$$a_1 = \frac{1}{2},\ a_2 = \frac{1}{6},\ \frac{a_n + a_{n+1} + a_{n+2}}{3} = \frac{1}{n(n+3)}\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

このとき, $a_3 = \boxed{}$, $a_4 = \boxed{}$, 一般に $a_n = \boxed{}$ となる。また, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \boxed{}$ となる。

〔慶応大〕

$n=1$ として

$\dfrac{a_1 + a_2 + a_3}{3} = \dfrac{1}{4}$　$4\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6} + a_3\right) = 3$　$\dfrac{8}{3} + 4a_3 = 3$

$4a_3 = \dfrac{1}{3}$　$\therefore\ a_3 = \dfrac{1}{12}$ //

$n=2$ として

$\dfrac{a_2 + a_3 + a_4}{3} = \dfrac{1}{10}$　$10\left(\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{12} + a_4\right) = 3$　$\dfrac{5}{2} + 10a_4 = 3$

$10a_4 = \dfrac{1}{2}$　$\therefore\ a_4 = \dfrac{1}{20}$ //

$a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots = \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{12}, \dfrac{1}{20} \cdots$

1×2　2×3　3×4　4×5

$a_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ //

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$

$= 1$ //