

漸化式16

数列 $\{a_n\}$ の項の間に、次の関係があるとする。

$$a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{1}{6}, \frac{a_n + a_{n+1} + a_{n+2}}{3} = \frac{1}{n(n+3)} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

このとき、 $a_3 = \square$, $a_4 = \square$, 一般に $a_n = \square$ となる。また、 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \square$ となる。
[慶応大]

$$\begin{array}{l} n=1 \text{ と } n=2 \text{ と } n=3 \text{ と } \\ a_1 + a_2 + a_3 = \frac{1}{4} \quad 4\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + a_3\right) = 3 \quad \frac{8}{3} + 4a_3 = 3 \end{array}$$

$$4a_3 = \frac{1}{3} \quad \therefore a_3 = \frac{1}{12}$$

$$\begin{array}{l} n=2 \text{ と } n=3 \text{ と } n=4 \text{ と } \\ a_2 + a_3 + a_4 = \frac{1}{10} \quad 10\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + a_4\right) = 3 \quad \frac{5}{2} + 10a_4 = 3 \end{array}$$

$$10a_4 = \frac{1}{2} \quad \therefore a_4 = \frac{1}{20}$$

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots = \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \dots$$

$\frac{1}{1 \times 2} \quad \frac{1}{2 \times 3} \quad \frac{1}{3 \times 4} \quad \frac{1}{4 \times 5}$

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 1 \end{aligned}$$