漸化式 2

$a_1 = -1, a_n = 3a_{n-1} + 1 \ (n \geqq 2)$ によって定義される数列 $\{a_n\}$ がある。

(1) $a_{k+1} - a_k = b_k \ (k = 1, 2, 3, \cdots)$ とおくとき, $b_k$ を $k$ の式で表せ。

(2) $a_n$ を $n$ の式で表せ。

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{6^n}$ の和を求めよ。

〔東北工大〕

(1)
$$\begin{array}{rl} & a_{n+1} = 3a_n + 1 \\ -) & a_n = 3a_{n-1} + 1 \\ \hline & a_{n+1} - a_n = 3(a_n - a_{n-1}) \end{array}$$
となるので $b_n = 3b_{n-1}$

つまり $b_{k+1} = 3b_k \ (k = 1, 2, 3 \cdots)$
$\left( \begin{array}{l} b_1 = a_2 - a_1 = -2 - (-1) = -1 \\ \because a_2 = 3a_1 + 1 = -3 + 1 = -2 \end{array} \right)$ より $b_k = -3^{k-1}$

(2) $a_2 = 3a_1 + 1 = -3 + 1 = -2$ より

数列 $b_k$ は初項 $a_2 - a_1 = -2 - (-1) = -1$ 公比3の等比数列

$\therefore b_n = -1 \cdot 3^{n-1}$ つまり $a_{n+1} - a_n = -3^{n-1}$

$$\therefore a_n = -1 - \sum_{k=1}^{n-1} 3^{k-1}$$
$$= -1 - \frac{1(3^{n-1} - 1)}{3-1}$$

整理して
$$a_n = \frac{-3^{n-1} - 1}{2}$$

(3)
$$\frac{a_n}{6^n} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{3^{n-1} + 1}{6^n} = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{6}\right)^n \right\}$$

より
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{6^n} = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{6}\right)^n \right\}$$
$$= -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{6}} \right)$$
$$= -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \right)$$
$$= -\frac{4}{15}$$