漸化式5

無限数列 $\{x_n\}$ において, $x_{n+1} = \dfrac{x_n}{x_n + 1}$ (ただし, $x_1 = a > 0$) であるとき,

(1) x_n を a と n の式で表せ。

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ を求めよ。

〔神奈川大〕

(1) 両辺の逆数をとると

$$\frac{1}{x_{n+1}} = \frac{x_n+1}{x_n} \to \frac{1}{x_{n+1}} = 1 + \frac{1}{x_n}$$

$\dfrac{1}{x_n} = b_n$ とおくと　$b_{n+1} - b_n = 1$

$\therefore\ b_n = b_1 + 1 \cdot (n-1)$

$b_1 = \dfrac{1}{x_1} = \dfrac{1}{a}$ であるから　$b_n = \dfrac{1}{a} + n - 1 = \dfrac{an-a+1}{a}$

$\therefore\ \dfrac{1}{x_n} = \dfrac{an-a+1}{a}$ より　$x_n = \dfrac{a}{an-a+1}$

(2)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a}{an-a+1} = 0$$