漸化式 9

数列 $\{x_n\}$ は $x_1=0, x_2=1, ax_n+bx_{n-1}+cx_{n-2}=0\ (n \geqq 3)$ ただし, $a+b+c=0$, かつ $|a|>|c|>0$ で与えられるとき,

(1) x_n を n を用いて表せ。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n)$ を求めよ。

〔標準問題〕

$b=-(a+c)$ として 与式へ代入すると

$ax_n-(a+c)x_{n-1}+cx_{n-2}=0$ として

特性方程式

$ax^2-(a+c)x+c=0$ より　$\begin{matrix}1 & & -1 & \to & -a\\ a & & -c & \to & -c\end{matrix}$

$(x-1)(ax-c)=0$ から

$$x_n-x_{n-1}=\frac{c}{a}(x_{n-1}-x_{n-2})$$

数列 $x_{n-1}-x_{n-2}$ は 初項 $x_2-x_1=1$ 公比 $\frac{c}{a}$ の等比数列

$$x_n-x_{n-1}=\left(\frac{c}{a}\right)^{n-1}$$

これから $x_n=0+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{c}{a}\right)^{k-1}$　　$|a|>|c|>0$ より $\left|\frac{c}{a}\right|<1$ であるから

$$=\frac{1-\left(\frac{c}{a}\right)^{n-1}}{1-\frac{c}{a}}\qquad \therefore\ x_n=\frac{a}{a-c}\left\{1-\left(\frac{c}{a}\right)^{n-1}\right\}$$

(2)

$$S_n=\sum_{n=1}^{n}x_n=\frac{a}{a-c}\left\{n-\frac{1-\left(\frac{c}{a}\right)^n}{1-\frac{c}{a}}\right\}$$

$$=\frac{a}{a-c}n-\frac{a^2}{(a-c)^2}\left\{1-\left(\frac{c}{a}\right)^n\right\}$$

$\therefore$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}S_n=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{a}{a-c}-\underbrace{\frac{a^2}{n(a-c)^2}\left\{1-\left(\frac{c}{a}\right)^n\right\}}_{0}\right]$$

$$=\frac{a}{a-c}$$