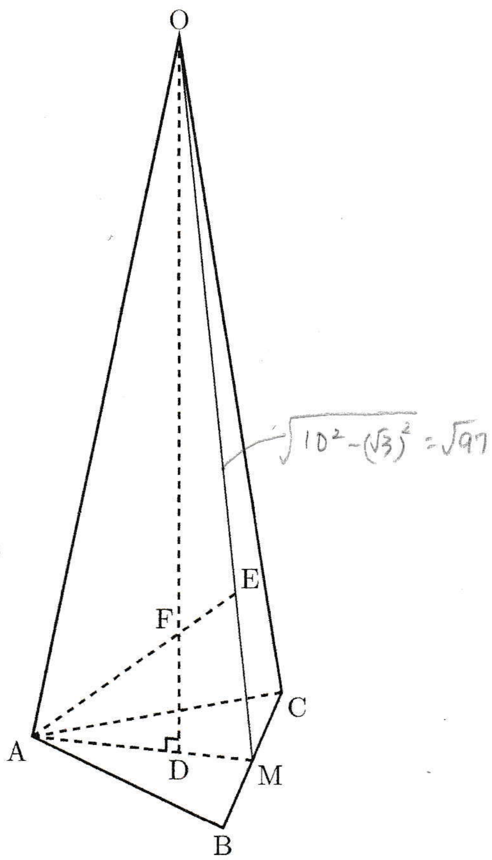
zukei 20

右の図のように，1 辺の長さが $2\sqrt{3}$ cm のである正三角形を底面とし，OA=OB=OC=10 cm とする正三角すい OABC がある。辺 BC の中点を M とし，頂点 O から底面に垂直におろした直線と底面との交点を D とすると，点 D は線分 AM 上にあり，OD= $4\sqrt{6}$ cm である。△OAM において，∠OAM の二等分線と辺 OM との交点を E とし，線分 OD と線分 AE の交点を F とする。

このとき，次の (1), (2) の問いに答えなさい。

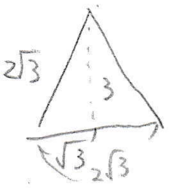
(1) 正三角すい OABC の体積を求めなさい。

(2) △ADF と △OFE の面積の比を最も簡単な整数の比で表しなさい。

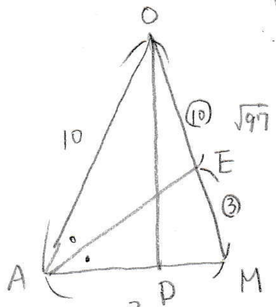


(1)

底面積



$2\sqrt{3}\times3\times\frac{1}{2}=3\sqrt{3}$ …①



AD=x　DM=$3-x$ として

OD^2 を2通りで表す

$OD^2=10^2-x^2$

$OD^2=(\sqrt{97})^2-(3-x)^2$

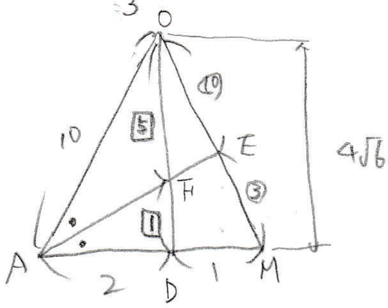
$100-x^2=97-(9-6x+x^2)$

$100-\cancel{x^2}=97-9+6x-\cancel{x^2}$

$6x=12$

$x=2$ … AD

〔茨城県〕



よって $OD=\sqrt{10^2-2^2}=4\sqrt{6}$ …②

従って 正三角すいの体積は ①,②より

$3\sqrt{3}\times4\sqrt{6}\times\frac{1}{3}=4\sqrt{18}$　　$12\sqrt{2}$ cm³

(2) AE は角の二等分線より OF : FD = 5 : 1，OE : EM = 10 : 3

$DF=\frac{1}{6}\times4\sqrt{6}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$ より $\triangle ADF=2\times\frac{2\sqrt{6}}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$ (cm²)

$\triangle OFE=1\times4\sqrt{6}\times\frac{1}{2}\times\frac{5\times10}{6\times13}=\frac{50\sqrt{6}}{39}$ (cm²)

よって

$\triangle ADF:\triangle OFE=\frac{2\sqrt{6}}{3}:\frac{50\sqrt{6}}{39}=13:25$

13 : 25