3zukei 125

右のI図のように，底面の1辺が6 cm，高さが$\sqrt{7}$ cm の正四角錐 A−BCDE があり，2辺 BC, DE の中点をそれぞれ M, N とし，線分 MN の中点を H とする。また，線分 AH 上に2点 O, P があり，正四角錐の内部に，点 O を中心とする球と点 P を中心とする球がある。

右のII図は，この立体を3点 A, M, N を通る平面で切った切り口を表している。II図中の円 O は △AMN の各辺と接していて，円 P は2辺 AM, AN と接している。また，2円 O, P は線分 AH 上の点 Q を通り，点 Q における接線と円 P の接線は同じ直線である。

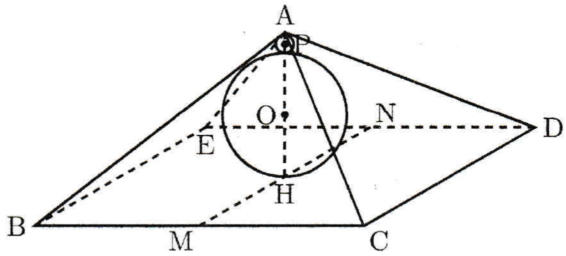
このとき，次の (1)〜(3) に答えよ。

(1) 辺 AB の長さを求めよ。また，正四角錐の表面積を求めよ。

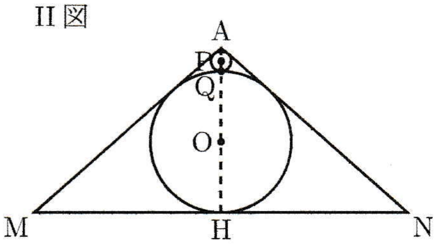
(2) 点 O を中心とする球の半径を求めよ。

(3) 点 O を中心とする球の体積と点 P を中心とする球の体積比を最も簡単な整数の比で表せ。

I図



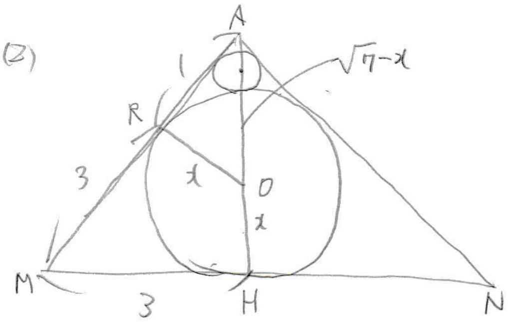

II図




〔京都府〕

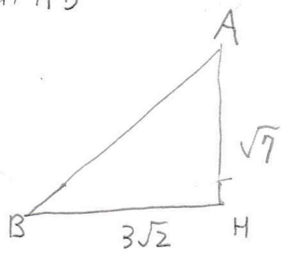
こういう時は II図を参考に解く II図があるので
この問題は易しいですよ。普通は II図はありません

(2)



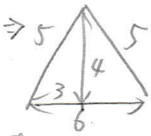

接線の関係から
MH＝MR＝3 となるので AR＝1
半径 OH＝OR＝$x$ とすると AO＝$\sqrt{7}-x$ より
三平方の定理を△ARO に用いると
$(\sqrt{7}-x)^2=1^2+x^2$
$2\sqrt{7}x=6$　$x=\frac{3}{\sqrt{7}}=\frac{3\sqrt{7}}{7}$　$\frac{3\sqrt{7}}{7}$ cm

(1) AB



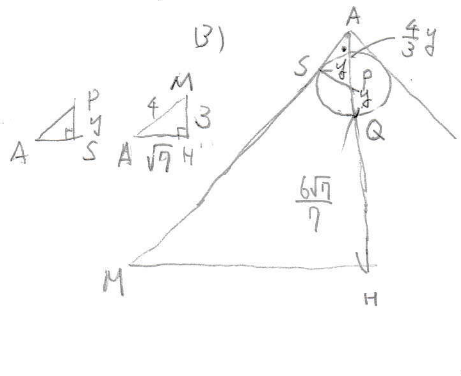

BH は BD の $\frac{1}{2}$
BD は $1:1:\sqrt{2}$ より $6\sqrt{2}$
$AB=\sqrt{(3\sqrt{2})^2+(\sqrt{7})^2}$
$=5$　AB＝5cm

△ABC ⇒




なので表面積は
$6\times4\times\frac{1}{2}\times4+36$
$=48+36$
$=84$　表面積 84 cm²

(3)




△ASP ∽ △AHM であるから 小さい球の半径 SP＝PQ＝$y$ とすると
$3:4=y:AP$ より $AP=\frac{4}{3}y$　ここで $AQ=AH-QH=\sqrt{7}-\frac{6\sqrt{7}}{7}=\frac{\sqrt{7}}{7}$ …①
$AQ=AP+PQ=\frac{4}{3}y+y=\frac{7}{3}y$ …②　①＝②より $\frac{7}{3}y=\frac{\sqrt{7}}{7}$　$y=\frac{3\sqrt{7}}{49}$
球は互いにいつも相似なので その比は $\frac{3\sqrt{7}}{7}:\frac{3\sqrt{7}}{49}=7:1$
体積は相似比の3乗なので $7^3:1^3=343:1$　343:1