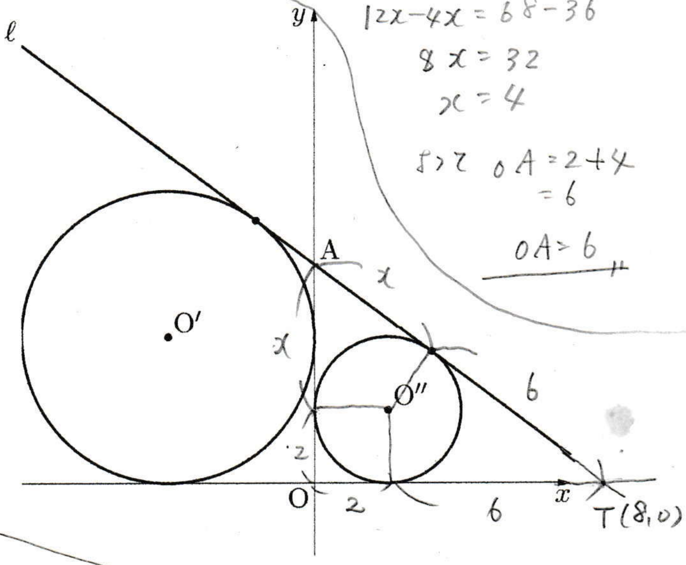
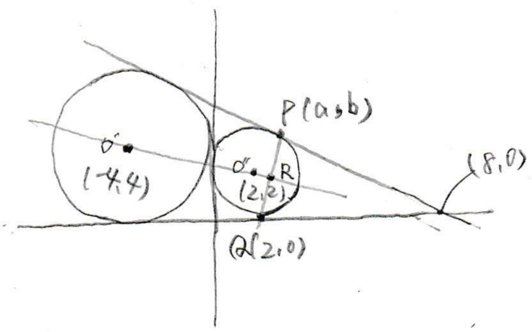
右の図のように, 円O′と円O″が直線ℓとx軸, y軸で接している。円O′の中心の座標は$(-4,4)$, 円O″の中心の座標は$(2,2)$である。直線ℓとy軸の交点をAとするとき, 原点OからAまでの長さを求めなさい。



(解1)



直線O′O″は $y=ax+b$とすると

$$-4a+b=4$$
$$-)\ 2a+b=2$$
$$-6a=2$$
$$a=-\frac{1}{3}$$

$$\frac{4}{3}+b=4$$
$$b=\frac{8}{3}$$
$$y=-\frac{1}{3}x+8$$

円O″とℓの接点をP(a,b)とし, (2,0)をQとすると PQの中点は直線O′O″上にあるので PQの中点をRとすると

$R\left(\frac{a+2}{2},\frac{b}{2}\right)$ これを $y=-\frac{1}{3}x+\frac{8}{3}$ に代入し

$$\frac{b}{2}=-\frac{1}{3}\left(\frac{a+2}{2}\right)+\frac{8}{3}$$
$$3b=-(a+2)+16$$
$$3b=-a-2+16$$
$$a=14-3b \cdots ①$$

ここでPO″は2なので2点間の距離から

$(a-2)^2+(b-2)^2=4$ これに①を代入して

$$(14-3b-2)^2+(b-2)^2=4$$
$$(12-3b)^2+(b-2)^2=4$$
$$144-72b+9b^2+b^2-4b=0$$
$$10b^2-76b+144=0$$
$$5b^2-38b+72=0$$

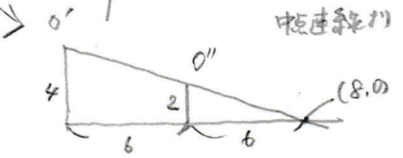
$\frac{1}{5}\times\frac{-4 \to -20}{-18 \to -18}$

$$(b-4)(5b-18)=0$$

$b<4$より $b=\frac{18}{5}$

$$a=14-3\times\frac{18}{5}=\frac{70}{5}-\frac{54}{5}=\frac{16}{5}$$

上へ



よって ℓは $P\left(\frac{16}{5},\frac{18}{5}\right)$ と $(8,0)$を通る.

$$\begin{cases} 8a+b=0 \\ \frac{16}{5}a+b=\frac{18}{5} \end{cases}$$

$$40a+5b=0$$
$$-)\ 16a+5b=18$$
$$24a=-18$$
$$a=-\frac{3}{4}$$
$$40\times\left(-\frac{3}{4}\right)+5b=0$$
$$5b=30$$
$$b=6$$

よって $\ell: y=-\frac{3}{4}x+6$

ゆえに OA $=6$

解2 三角形の内心をつかって解く 下図より

△OATで三平方の定理より

$$(x+6)^2=(x+2)^2+8^2$$
$$\cancel{x^2}+12x+36=\cancel{x^2}+4x+4+64$$
$$12x-4x=68-36$$
$$8x=32$$
$$x=4$$

よって OA $=2+4$ $=6$

OA $=6$