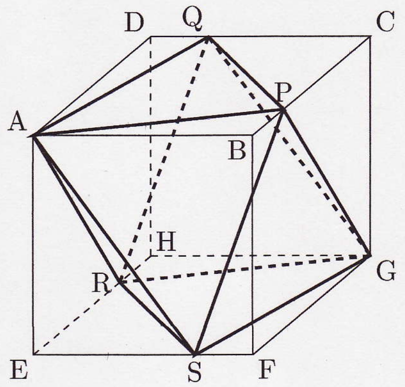
1 辺の長さが 1 cm の立方体 ABCD−EFGH がある。4 点 P, Q, R, S をそれぞれ辺 BC, CD, HE, EF 上に △APQ と △GRS がともに正三角形となるようにとる。

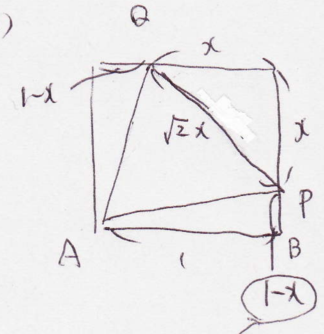
(1) 線分 AP の長さを求めなさい。

(2) △APQ, △GRS, △ASP, △PSG, △PGQ, △QGR, △QRA, △ARS の 8 個の面で囲まれる立体の体積を求めよ。



〔灘〕

(1)



$AP^2 = PQ^2$

$AP^2 = 1^2 + (1-x)^2$

$PQ^2 = (\sqrt{2}x)^2 = 2x^2$

$1 + (1-x)^2 = 2x^2$

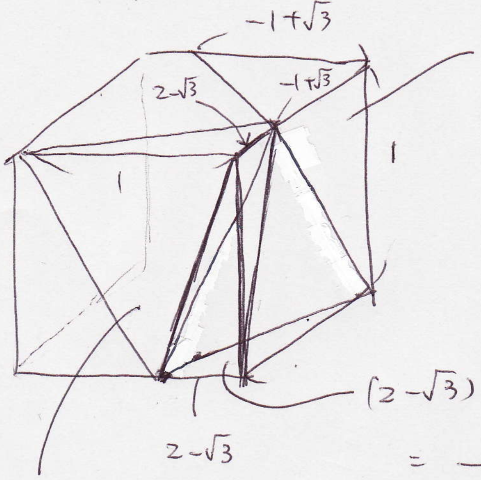
$x^2 + 2x - 2 = 0 \quad x = -1 \pm \sqrt{3} \quad x > 0$ より $x = -1 + \sqrt{3}$

$QP = \sqrt{2} \times (-1+\sqrt{3}) = -\sqrt{2} + \sqrt{6} = AP$

$\sqrt{6} - \sqrt{2}$ cm

$1 - (-1+\sqrt{3})$
$= 2 - \sqrt{3}$

(2)



$(-1+\sqrt{3}) \times (-1+\sqrt{3}) \times \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{3} = \frac{(-1+\sqrt{3})^2}{6}$

$= \frac{4-2\sqrt{3}}{6}$

$= \frac{2-\sqrt{3}}{3}$ ← この立体が2つある

$(2-\sqrt{3}) \times 1 \times \frac{1}{2} \times (2-\sqrt{3}) \times \frac{1}{3}$

$= \frac{(2-\sqrt{3})^2}{6}$

$= \frac{7-4\sqrt{3}}{6}$ ← この立体が2つある

$(2-\sqrt{3}) \times 1 \times \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{3}$

$= \frac{2-\sqrt{3}}{6}$ ← この立体が4つある

これより求める立体は

$$1 - \left(\frac{2-\sqrt{3}}{3} \times 2 + \frac{7-4\sqrt{3}}{6} \times 2 + \frac{2-\sqrt{3}}{6} \times 4 \right)$$

$$= 1 - \left(\frac{4-2\sqrt{3}}{3} + \frac{7-4\sqrt{3}}{3} + \frac{4-2\sqrt{3}}{3} \right) = 1 - \frac{15-8\sqrt{3}}{3} = \frac{8\sqrt{3}-12}{3}$$

$\frac{8\sqrt{3}-12}{3}$ cm^3