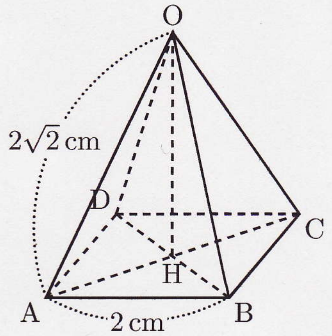
右の図のように，底面は 1 辺の長さが 2 cm の正方形で，他の辺の長さが $2\sqrt{2}$ cm の正四角錐 OABCD がある。次の (1), (2) の問いに答えなさい。

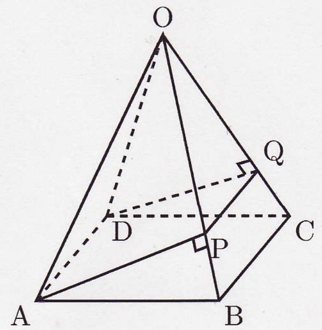


(1) 右の図のように，底面の正方形 ABCD の対角線の交点を H とするとき，線分 OH の長さと正四角錐 OABCD の体積をそれぞれ求めなさい。

(2) 右の図のように，点 A から辺 OB に引いた垂線と辺 OB との交点を P, 点 D から辺 OC との交点を Q とする。次の①, ②の問いに答えなさい。

① 線分 PQ の長さを求めなさい。

② 四角錐 DPBCQ の体積を求めなさい。



(1)

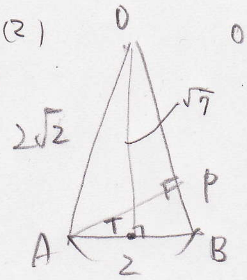
$AC = 2\sqrt{2}$ cm　　$AH = \sqrt{2}$

$OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = \sqrt{8-2} = \sqrt{6}$　　$OH = \sqrt{6}$ cm

$4 \times \sqrt{6} \times \frac{1}{3} = \frac{4\sqrt{6}}{3}$ cm^3

(2)

①



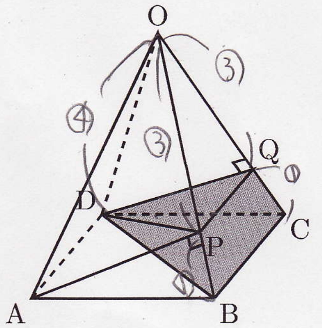
OT ⊥ AB となる T を AB 上にとる

$OT = \sqrt{OA^2 - AT^2} = \sqrt{8-1} = \sqrt{7}$

△AOB の面積の関係より

$2 \times \sqrt{7} = 2\sqrt{2} \times AP$

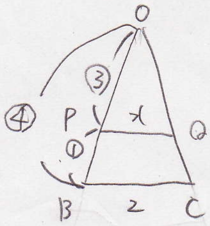
これより $AP = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{14}}{2}$ cm



△ABP で三平方の定理より　$PB = \sqrt{2^2 - \left(\frac{\sqrt{14}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

これより　$OP = OB - PB = 2\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$

つまり　$OP : PB = \frac{3}{2}\sqrt{2} : \frac{\sqrt{2}}{2} = 3 : 1$



③ : ④ = x : 2

④x = ⑥

$x = \frac{3}{2}$　　$PQ = \frac{3}{2}$ cm

② 求める体積は

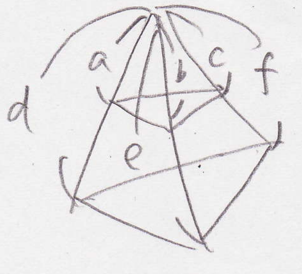
〔大分〕

正四角錐 OABCD $\times \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{4 \times 3 \times 3}{4 \times 4 \times 4}\right)$

$= \frac{4\sqrt{6}}{3} \times \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{9}{16}\right)$

$= \frac{4\sqrt{6}}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{7}{16}$

$= \frac{7\sqrt{6}}{24}$　　$\frac{7\sqrt{6}}{24}$ cm^3



公式

$\frac{a \times b \times c}{d \times e \times f}$