△ABC において, AB=AC=3, BC=2 であるとき

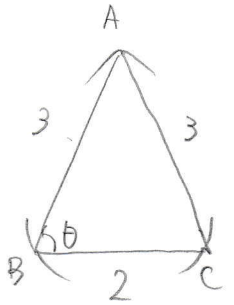
$$\cos\angle ABC = \frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}},\ \sin\angle ABC = \frac{\boxed{ウ}\sqrt{\boxed{エ}}}{\boxed{オ}}$$

であり, △ABCの面積は $\boxed{カ}\sqrt{\boxed{キ}}$, △ABCの内接円Iの半径は $\dfrac{\sqrt{\boxed{ク}}}{\boxed{ケ}}$ であめ。

ぬけ

また, 円Iの中心から点Bまでの距離は $\sqrt{\dfrac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}}$ である。

〔12センター試験〕



∠ABC=θとすると余弦定理より

$9=9+4-2\cdot3\cdot2\cos\theta$

$12\cos\theta=4$　　$\cos\theta=\dfrac{1}{3}$　…アイ

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より

$\sin^2\theta=1-\dfrac{1}{9}=\dfrac{8}{9}$　　∴ $\sin\theta=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$　（∵$\sin\theta>0$ より）

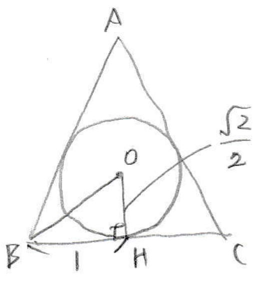
…ウエオ

△ABCの面積Sは

$S=\dfrac{1}{2}\cdot3\cdot2\sin\theta=\dfrac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot\dfrac{2\sqrt{2}}{\cancel{3}}=2\sqrt{2}$　…カキ

内接円の半径rとすると

$\dfrac{1}{2}r(3+2+3)=2\sqrt{2}$ より　$r=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　…クケ



円の中心をOとする、Oから辺BCにおろした垂線の足をHとすると

△OBHで三平方の定理を用いる

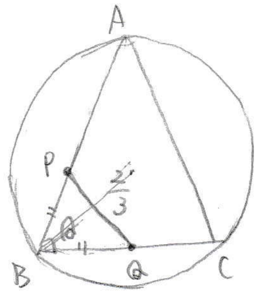
$OH=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　$BH=1$ であるから

$BO=\sqrt{1^2+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{3}{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　…コサ

$\frac{}{2}\ \frac{1}{2}$

(1) 辺 AB 上の点 P と辺 BC 上の点 Q を, BP=BQ かつ PQ= $\frac{2}{3}$ となるようにとる。このとき, △PBQ の外接円 O の直径は $\frac{\sqrt{\boxed{シ}}}{\boxed{ス}}$ であり, 円 I と円 O は $\boxed{セ}$。ただし, $\boxed{セ}$ には次の⓪〜④から当てはまるものを一つ選べ。

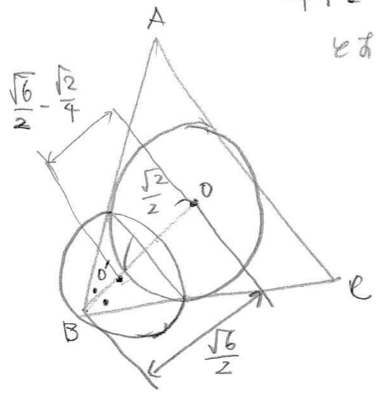
⓪ 重なる (一致する)　　① 内接する
② 外接する　　③ 異なる 2 点で交わる
④ 共有点をもたない



$\frac{PQ}{\sin\theta} = 2R$ ∵ Rは外接円の半径

$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = 2R$ ∴ 求めるのは直径なので $\frac{\sqrt{2}}{2}$ …シス

円Iの半径 $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$　円Oの半径 $r = \frac{\sqrt{2}}{4}$　円Iの中心O　円Oの中心O′ とすると



$\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{4} > \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{2\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ OO′の距離

$\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4} < \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{2\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ OO′の距離

∴ ③…セ

B,O,O′はともに∠ABCの二等分線上

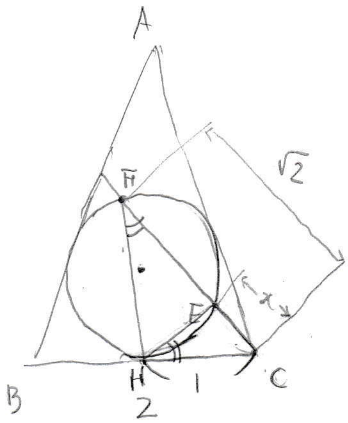
(2) 円 I 上に点 E と点 F を, 3 点 C, E, F が一直線上にこの順で並び, かつ, CF$=\sqrt{2}$ となるようにとる。このとき

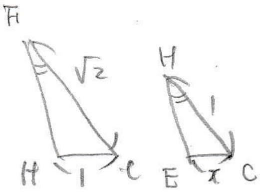
$$\mathrm{CE}=\frac{\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}}{\boxed{\text{タ}}},\quad \frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{CE}}=\boxed{\text{チ}}$$

である。

さらに, 円 I と辺 BC との接点を D, 線分 BE と線分 DF との交点を G, 線分 CG の延長と線分 BF との交点を M とする。このとき, $\dfrac{\mathrm{GM}}{\mathrm{CG}}=\dfrac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$ である。

〔12 センター試験〕





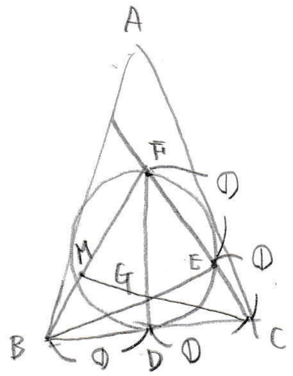
(∵ 円IとBCの接点をHとする)

$\sqrt{2}:1=1:x$

$\sqrt{2}x=1$　　$x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ … ソタ

$\mathrm{EF}=\sqrt{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ より

$\mathrm{EF}=\mathrm{CE}$　∴ $\dfrac{\mathrm{EF}}{\mathrm{CE}}=1$ … チ



先より EF : CE = CD : DB = 1 : 1

チェバの定理より BM : MF = 1 : 1

メネラウスの定理より

$\therefore \dfrac{\mathrm{CG}}{\mathrm{GM}}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1}=1$

$\dfrac{\mathrm{MF}}{\mathrm{FB}}$　　$\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}$

$\therefore \dfrac{\mathrm{CG}}{\mathrm{GM}}=\dfrac{2}{1}$

$\therefore \dfrac{\mathrm{GM}}{\mathrm{CG}}=\dfrac{1}{2}$ … ツテ