

f5000

Oを原点とする座標平面上の2点 $P(2\cos\theta, 2\sin\theta)$, $Q(2\cos\theta + \cos 7\theta, 2\sin\theta + \sin 7\theta)$ を考える。ただし、 $\frac{\pi}{8} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ とする。

(1) $OP = \boxed{\text{ア}}$, $PQ = \boxed{\text{イ}}$ である。また

$$\begin{aligned} OQ^2 &= \boxed{\text{ウ}} + \boxed{\text{エ}} (\cos 7\theta \cos \theta + \sin 7\theta \sin \theta) \\ &= \boxed{\text{ウ}} + \boxed{\text{エ}} \cos(\boxed{\text{オ}} \theta) \end{aligned}$$

である。

よって、 $\frac{\pi}{8} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ の範囲で、 OQ は $\theta = \frac{\pi}{\boxed{\text{カ}}}$ のとき最大値 $\sqrt{\boxed{\text{キ}}}$ をとる。

$$OP = \sqrt{4\cos^2\theta + 4\sin^2\theta} = 2 \dots \text{ア}$$

$$PQ = \sqrt{\cos^2 7\theta + \sin^2 7\theta} = 1 \dots \text{イ}$$

$$OQ^2 = (2\cos\theta + \cos 7\theta)^2 + (2\sin\theta + \sin 7\theta)^2$$

$$= 4\cos^2\theta + 4\cos\theta\cos 7\theta + \cos^2 7\theta + 4\sin^2\theta + 4\sin\theta\sin 7\theta + \sin^2 7\theta$$

$$= 5 + 4(\cos 7\theta \cos \theta + \sin 7\theta \sin \theta) \text{ 和差定理より}$$

$$\textcircled{\text{ア}} \textcircled{\text{イ}}$$

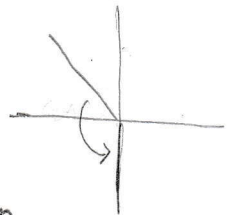
$$= 5 + 4 \cos 6\theta \dots \textcircled{\text{ウ}}$$

$$\frac{\pi}{8} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \text{ より } 6\theta \text{ の範囲は } \frac{3\pi}{4} \leq 6\theta \leq \frac{3\pi}{2}$$

$$\therefore \cos 6\theta \text{ は } -1 \leq \cos 6\theta \leq 0 \text{ となり } \theta = \frac{\pi}{4} \text{ のとき最大値 } 0$$

したがって

$$\text{よって } \theta = \frac{\pi}{4} \text{ のとき } OQ^2 = 5 \text{ より } \sqrt{5} \dots \textcircled{\text{キ}}$$



(2) 3点 O, P, Q が一直線上にあるような θ の値を求めよう。

直線 OP を表す方程式は ク である。ク に当てはまるものを、次の①～③のうちから一つ選べ。

① $(\cos \theta)x + (\sin \theta)y = 0$

② $(\sin \theta)x + (\cos \theta)y = 0$

② $(\cos \theta)x - (\sin \theta)y = 0$

③ $(\sin \theta)x - (\cos \theta)y = 0$

このことにより、 $\frac{\pi}{8} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ の範囲で、3点 O, P, Q が一直線上にあるのは $\theta =$ ケ のときであることがわかる。

(3) $\angle OQP$ が直角となるのは $OQ = \sqrt{\text{コ}}$ のときである。したがって、 $\frac{\pi}{8} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ の範囲で、 $\angle OQP$ が直角となるのは $\theta = \frac{\text{サ}}{\text{シ}}\pi$ のときである。

[15 センター試験]

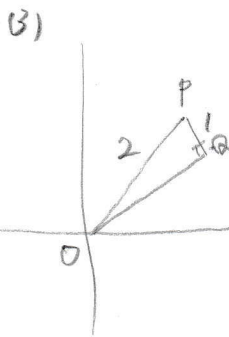
(2) $y = a \sin \theta \quad x = p(2a \cos \theta, 2a \sin \theta)$ だとすると

$2a \sin \theta = 2a \cos \theta \quad \therefore a \cdot \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ とし $y = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} x$

$\therefore \sin \theta x - \cos \theta y = 0 \quad \text{③} \dots \text{②} \quad \therefore \sin \theta = \cos \theta$

$2a \sin \theta \cos \theta + \sin \theta \cos 2\theta - 2a \cos \theta \cos \theta - \sin 2\theta \cos \theta = 0$

$\therefore \sin \theta \cos 2\theta = \sin 2\theta \cos \theta \quad \therefore \tan \theta = \tan 2\theta \quad \therefore \theta = \frac{\pi}{6} \dots \text{⑦}$



三平方の定理より

$OQ = \sqrt{4-1} = \sqrt{3} \dots \text{③}$

$\therefore \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$5 + 4 \cos 6\theta = 3$

$\therefore \cos 6\theta = -\frac{1}{2} \quad \therefore \frac{\pi}{8} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$

$6\theta = \frac{4}{3}\pi \quad \therefore \theta = \frac{2}{9}\pi \dots \text{④}$

