1/2

2015 IIB 1-2

a, b を正の実数とする。連立方程式

$$(*) \begin{cases} x\sqrt{y^3} = a \\ \sqrt[3]{x}y = b \end{cases}$$

を満たす実数 x, y について考えよう。

(1) 連立方程式 (*) を満たす正の実数 x, y は

$$x = a^{\boxed{\text{ア}}} b^{\boxed{\text{イウ}}},\ y = a^p b^{\boxed{\text{エ}}}$$

となる。ただし，

$$p = \frac{\boxed{\text{オカ}}}{\boxed{\text{キ}}}$$

である。

$x^2 y^3 = a^2$ …①

$x y^3 = b^3$ …② これより $x b^3 = a^2$ ∴ $x = \dfrac{a^2}{b^3}$ …③

$x = a^2 b^{-3}$ …アイウ

③と②より

$\dfrac{a^2}{b^3} y^3 = b^3$

$y^3 = \dfrac{b^6}{a^2}$

$y = \sqrt[3]{\dfrac{b^6}{a^2}}$

$= a^{-\frac{2}{3}} \cdot b^2$ ← エ

$p = -\dfrac{2}{3}$ …オカキ

(2) $b = 2\sqrt[3]{a^4}$ とする。a が $a > 0$ の範囲を動くとき, 連立方程式 (*) を満たす正の実数 x, y について, $x + y$ の最小値を求めよう。

$b = 2\sqrt[3]{a^4}$ であるから, (*) を満たす正の実数 x, y は, a を用いて

$$x = 2^{\boxed{\text{イウ}}}a^{\boxed{\text{クケ}}},\quad y = 2^{\boxed{\text{エ}}}a^{\boxed{\text{コ}}}$$

と表される。したがって, 相加平均と相乗平均の関係を利用すると, $x + y$ は $a = 2^q$ のとき最小値 $\sqrt{\boxed{\text{サ}}}$ をとることがわかる。ただし

$$q = \frac{\boxed{\text{シス}}}{\boxed{\text{セ}}}$$

である。

〔センター試験〕

$b^3 = 8a^4$ であるから

③より $x = \dfrac{a^2}{8a^4} = \dfrac{1}{8a^2} = 2^{-3}a^{-2}$ イウ クケ

$y^3 = \dfrac{b^6}{a^2}$ より

$y^3 = \dfrac{64a^8}{a^2} = 64a^6$

$\therefore\ y = \sqrt[3]{64a^6} = 2^2 \cdot a^2$ エ コ

$\therefore\ x + y = \dfrac{1}{8a^2} + 4a^2 \geqq 2\sqrt{\dfrac{1}{8a^2} \cdot 4a^2} = \sqrt{2}$ …サ

$\dfrac{1}{8a^2} = 4a^2$

$32a^4 = 1$

$a^4 = \dfrac{1}{32}$

$a = 2^{-\frac{5}{4}}$ シスセ