はじめに, ここにある DFT などの信号処理の文章は学生時代に勉強したものである。DFT はゼミで卒論の傍ら勉強していたものである。もちろん間違っていることがあることが予測されるので, 閲覧にはご注意を。emath, $\TeX$ の練習です。ちなみに書いている本人は現在信号処理については記憶の彼方に消えている (笑)。ではご覧ください。

DFT とは入力信号に対してフレームの概念を導入することで, N 個の入力信号から N 個の時間平均ともいえるスペクトラム成分を出力する。DFT から得られるスペクトラム Φ は次のように与えられる。

$$\Phi = \{\phi_0, \phi_1, \phi_2, \cdots \phi_{N-1}\}$$

ここで ϕ_k はスペクトラム Φ を構成するインデックス k の成分であり, DFT によって次のように定義される。

$$\phi_k = \sum_{r=0}^{N-1} x(r)h(r)W_N^{-rk} \ \cdots\cdots\cdots\cdots\ ①$$

但し, $x(r)$ は入力信号, $h(r)$ は Window 関数, $W_N^{-rk} = exp(-j2\pi rk/N)$ で与えられる回転演算子である。

次に, スペクトラム Φ から N 個の出力信号を合成する IDFT を次のように定義する。

$$y(m) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \phi_k W_N^{mk} \ \cdots\cdots\cdots\cdots\ ②$$

但し, $y(m)$ はスペクトラム Φ から合成される出力信号, $W_N^{mk} = exp(j2\pi mk/N)$ で与えられる回転演算子である。

ここで, スペクトラム Φ から合成される出力信号 $y(m)$ が入力信号 $x(r)$ と一致することを証明する。

①を②に代入すると

$$\begin{aligned} y(m) &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left\{\sum_{r=0}^{N-1} x(r)h(r)W_N^{-rk}\right\}W_N^{mk} \\ &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} W_N^{(m-r)k}\left\{\sum_{r=0}^{N-1} x(r)h(r)\right\} \end{aligned}$$

ここで

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} W_N^{(m-r)k} = \begin{cases} 1 & (m=r) \\ 0 & else \end{cases}$$

従って, 出力 $y(m)$ は $m = r$ のときのみ値をもち, このとき $y(m)$ は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} y(m) &= \sum_{r=0}^{N-1} x(r)h(r) \\ &= x(m)h(m) \quad (0 \leqq m \leqq N-1) \end{aligned}$$

ここで, Window 関数 $h(r)$ は重み 1 の関数であるから,

$$h(r) = \begin{cases} 1 & 0 \leqq r \leqq N-1 \\ 0 & else \end{cases}$$

このとき, N 個の出力信号が, N 個の入力信号と一致することがわかる。