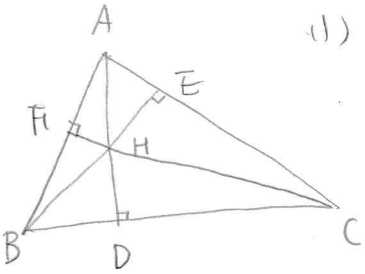
大学入試シリーズ
中学生レベル 2

鋭角三角形 △ABC において, 頂点 A, B, C から各対辺に垂線 AD, BE, CF を下ろす。これらの垂線は垂心 H で交わる。このとき, 以下の問いに答えよ。

(1) 四角形 BCEF と AFHE が円に内接することを示せ。

(2) ∠ADE = ∠ADF であることを示せ。

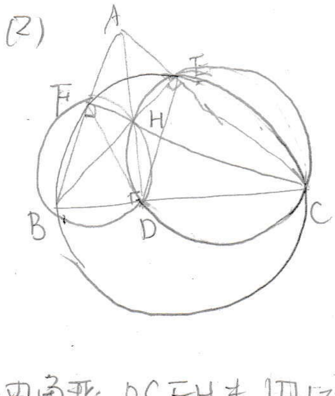
〔東北大学〕



(1)
四角形BCEFで
∠BEC=∠BFC=90°となるので
BCを直径とする円周上に点E,Fは
存在する。よって四点B,C,E,Fが
同一円周上に存在するので
四角形BCEFが円に内接する

四角形AFHEで
∠AFH=∠AEH=90°となり
AHを直径とする円周上に点F,Eが存在する。
よって四点A,F,H,Eが同一円周上に存在するので
四角形AFHEは円に内接する

(2)



(1)と同様にして四角形BDHF,四角形DCEHは
円に内接することがいえる。
ここで(1)より四角形BCEFが円に内接するので
∠FBE=∠FCE(円周角の定理)…①
四角形BDHFが円に内接するので同様に円周角の
定理から
∠FBE=∠FDH …②
また四角形DCEHも円に内接することから円周角の定理より
∠FCE=∠EDH …③
①、②、③より
∠EDH=∠FDH
∠EDH=∠ADE, ∠FDH=∠ADF より
∠ADE=∠ADF となる