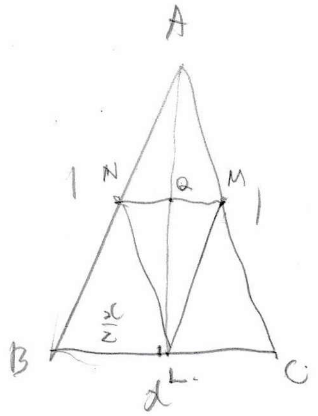
三角形ができる条件より $0<x<2$

△ABCの面積は

△ABLに三平方の定理を用いると



$AL = \sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$

よって

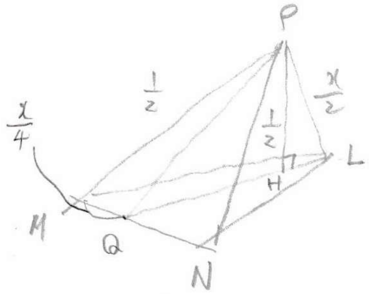
△ABCの面積は

$\frac{1}{2}x\sqrt{1-\frac{x^2}{4}} = \frac{x\sqrt{4-x^2}}{4}$

ここで △ANM≡△NBL≡△MLC≡△LMN より

△LMNの面積は $\frac{1}{4}$△ABC であるから $\triangle LMN = \frac{x\sqrt{4-x^2}}{16}$ …①

立体を組み立てると下図のようになりMNの中点をQとすると $MQ = \frac{x}{4}$



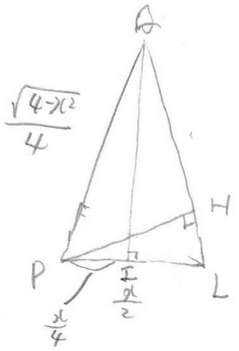
△PQMで三平方の定理より

$PQ = \sqrt{\frac{1}{4}-\frac{x^2}{16}} = \frac{\sqrt{4-x^2}}{4}$ 同様に

QLも $\frac{\sqrt{4-x^2}}{4}$

ここで△PQLをかき出すと左図になり

PLを底辺としたときの高さQIは



$QI\ \sqrt{\frac{4-x^2}{16}-\frac{x^2}{16}} = \frac{\sqrt{4-2x^2}}{4}$ $4-2x^2>0$ より $0<x<\sqrt{2}$

ここで四面体の高さPHは HはQL上にあるので

△PLQの面積の関係より

$\frac{x}{2}\cdot\frac{\sqrt{4-2x^2}}{4} = \frac{\sqrt{4-x^2}}{4}\cdot PH$

$PH = \frac{x\sqrt{4-2x^2}}{2\sqrt{4-x^2}}$ …②

①,②より四面体の体積Vは

$V = \frac{x\cancel{\sqrt{4-x^2}}}{16}\cdot\frac{x\sqrt{4-2x^2}}{2\cancel{\sqrt{4-x^2}}}\cdot\frac{1}{3}$

$= \frac{x^2}{96}\sqrt{4-2x^2}$

$= \frac{1}{96}\sqrt{4x^4-2x^6}$

ここで

$V(x) = 4x^4-2x^6$ とおくと ∵ $0<x<\sqrt{2}$

$V'(x) = 16x^3-12x^5$

$= 4x^3(4-3x^2)$

$V'(x)=0$ とすると $x=\frac{2}{\sqrt{3}}$ で極値をもつ.

x	0	…	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	…	$\sqrt{2}$
$V'(x)$		+	0	−	
$V(x)$		↗		↘	
V	0		$\frac{\sqrt{3}}{108}$		0

よって $x=\frac{2}{\sqrt{3}}$ のとき体積は最大で

その値は $\frac{\sqrt{3}}{108}$

う〜んあってますか？