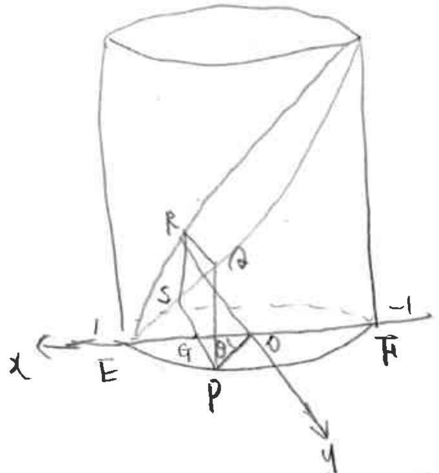


体積を[0,1],[-1,0]の区間で分けて求める

∠EOP=θとすると

$\overset{\frown}{EP}=\theta$

$PQ=\theta^2$

PG=sinθより RQ=2sinθ

よって長方形 PQRSの面積S(θ)は

$S(\theta)=2\theta^2\sin\theta$　$x=\cos\theta$より $dx=-\sin\theta d\theta$

よって

$V_1=\int_0^1 S(\theta)dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} 2\theta^2\sin\theta\cdot-\sin\theta d\theta$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\theta^2\sin^2\theta d\theta$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta^2(1-\cos2\theta)d\theta$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta^2 d\theta-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta^2\cos2\theta d\theta$

$=\left[\frac{1}{3}\theta^3\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\alpha$ …①

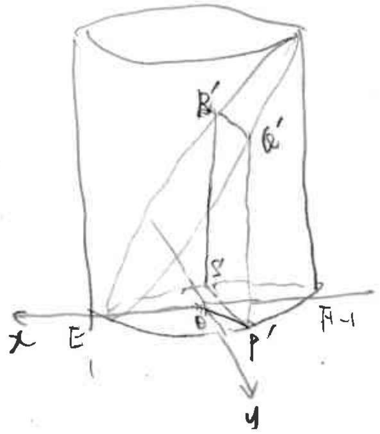
ここで

$\alpha=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta^2\cos2\theta d\theta=\left[\frac{1}{2}\sin2\theta\cdot\theta^2\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta\sin2\theta d\theta$

$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta\sin2\theta d\theta$　　$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta\sin2\theta d\theta=\left[-\frac{1}{2}\cos2\theta\cdot\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\cos2\theta d\theta$

$=-\frac{\pi}{4}$　　$=\frac{\pi}{4}+\left[\frac{1}{4}\sin2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

よって ①は $\frac{\pi^3}{24}+\frac{\pi}{4}$ …Ⓐ



∠EOP'=θとすると

$\overset{\frown}{EP'}=\theta$

$P'Q'=\theta^2$

$R'Q'=2\sin\theta$

となり先と同様になるから

$V_2=\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}-2\theta^2\sin\theta d\theta$

$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}2\theta^2\sin\theta d\theta$

$=\left[\frac{1}{3}\theta^3\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-\beta$ …②

$\beta=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\theta\sin2\theta d\theta$

$=-\left\{\left[-\frac{1}{2}\cos2\theta\cdot\theta\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\cos2\theta d\theta\right\}$

$=-\left\{-\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}\right)+\left[\frac{1}{4}\sin2\theta\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right\}$

$=\frac{3}{4}\pi$

よって ②は $\frac{\pi^3}{3}-\frac{\pi^3}{24}-\frac{3}{4}\pi$ …Ⓑ

分けて求める必要なし

$V=\int_0^{\pi}2\theta^2\sin^2\theta d\theta$ (α)

$=\left[\frac{1}{3}\theta^3\right]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\theta\sin2\theta d\theta$

$=\frac{\pi^3}{3}+\left[-\frac{1}{2}\cos2\theta\cdot\theta\right]_0^{\pi}$

$+\left[\frac{1}{4}\sin2\theta\right]_0^{\pi}$

$=\frac{\pi^3}{3}-\frac{\pi}{2}$

答は同じ

Ⓐ+Ⓑより

$\frac{\pi^3}{3}-\frac{\pi}{2}$