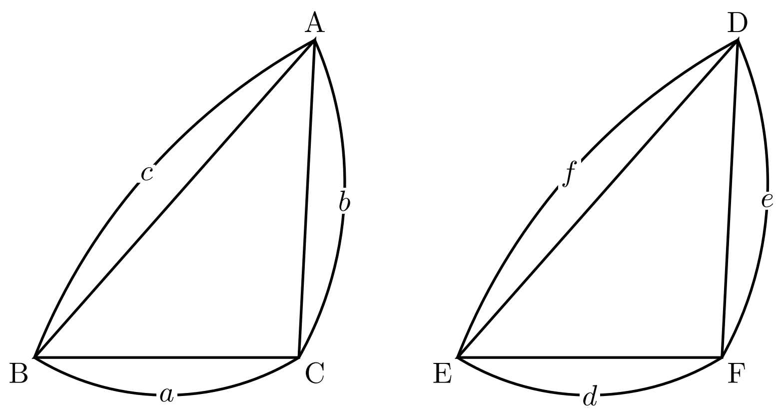
三角形の合同条件は3組の辺がそれぞれ等しいに落ち着く。あたりまえのしょーもないことを証明してみようというのが, 今回のテーマです。暇つぶし程度にお付き合いください。

さて, 数樂のサイトでものすごく簡単に触れていますが, 三角形の合同条件は, 高校生の知識を用いれば, すべて3組の辺がそれぞれ等しいに落ち着くことを証明？していきたいと思います。以下の図は, 見た目は同じですが, 証明するにあたって, 辺や角の大きさはそれぞれ異なるものとしていきます。



それでは, 証明していきましょう。

証明することは, 次の2つの事柄です。

① 2組の辺とその間の角がそれぞれ等しいということなら, 3組の辺がそれぞれ等しいで証明できる。

② 1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいということなら, 3組の辺がそれぞれ等しいで証明できる。

先ず①において, 仮定を

$$c = f,\ b = e, \angle\mathrm{A} = \angle\mathrm{D}$$

としていきます。余弦定理より,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\angle\mathrm{A}$$

$$d^2 = e^2 + f^2 - 2ef\cos\angle\mathrm{D}$$

ここで, 仮定より,

$$c = f,\ b = e, \angle\mathrm{A} = \angle\mathrm{D}$$

であるから,

$$a = d$$

といえます。したがって,

$$a = d,\ b = e,\ c = f$$

次に②において，仮定を

$$a = d,\ \angle\mathrm{B} = \angle\mathrm{E},\ \angle\mathrm{C} = \angle\mathrm{F}$$

としていきます。正弦定理より，

$$\frac{a}{\sin\angle\mathrm{A}} = \frac{b}{\sin\angle\mathrm{B}} = \frac{c}{\sin\angle\mathrm{C}}$$

$$\frac{d}{\sin\angle\mathrm{D}} = \frac{e}{\sin\angle\mathrm{E}} = \frac{f}{\sin\angle\mathrm{F}}$$

であるから，

$$b = \frac{a\sin\angle\mathrm{B}}{\sin\angle\mathrm{A}},\ c = \frac{a\sin\angle\mathrm{C}}{\sin\angle\mathrm{A}}$$

$$e = \frac{d\sin\angle\mathrm{E}}{\sin\angle\mathrm{D}},\ f = \frac{d\sin\angle\mathrm{F}}{\sin\angle\mathrm{D}}$$

ここで，

$$\angle\mathrm{B} = \angle\mathrm{E},\ \angle\mathrm{C} = \angle\mathrm{F}$$

であるから，

$$\angle\mathrm{A} = \angle\mathrm{D}$$

がいえるので，

$$\sin\angle\mathrm{A} = \sin\angle\mathrm{D},\ \sin\angle\mathrm{B} = \sin\angle\mathrm{E},\ \sin\angle\mathrm{C} = \sin\angle\mathrm{F}$$

となり，これらと

$$a = d$$

とあわせて

$$a = d,\ b = e,\ c = f$$

となります。

ちゃんちゃん。

3 組の辺がそれぞれ等しいで証明可能ですが面倒ですね。直角三角形 (斜辺と他の一辺〜の場合) なら三平方の定理が使えますけど … というかその必要は全くなさそうですね。

またつまらんものを切ってしまった？