

これってどうなるの?

よくある問題で、 $\sqrt{2}=1.414$ のとき、 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ の値を求めなさい。というのがある。

効率的な解法として、 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ の分母を有理化する方法がある。

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1.414}{2} = 0.707$$

これが一般的な解法である。では、この手の失敗?を書くところなる。

分母を有理化しない場合です。直接 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ の分母を 1.414 で置くとどうなるか、実験してみます (' ') 二パ。

$$\frac{1}{1.414} = \dots$$

おぞましいので、Perl で計算してみます。

$$\begin{array}{r} 0.70721357850070 \\ 1.414 \overline{) 1000} \\ \underline{9898} \\ 10200 \\ \underline{9898} \\ 3020 \\ \underline{2828} \\ 1920 \\ \underline{1414} \\ 5060 \\ \underline{4242} \\ 8180 \\ \underline{7070} \\ 11100 \\ \underline{9898} \\ 12020 \\ \underline{11312} \\ 7080 \\ \underline{7070} \\ 10000 \\ \underline{9898} \\ 1020 \end{array}$$

でてきたようですね。さすが emath,Perl との連携素晴らしい。

結果、 $\frac{1}{1.414} = 0.707213578500$

ちなみに分数表記は $\frac{1}{1.414} = \frac{500}{707}$

分数で書けば問題はないでしょう。3つのどれが正解かって?僕は全部正解だと思います。作問者の意図に反しますがね?

じゃあ、この誤差はなんなのでしょうね。求め方が違うのに方や有限小数だし、方や循環小数になる。ってことで検証してみましょう。

結論から言うと $\sqrt{2} = 1.414$ とした時点で、誤差が出てしまうのです。無理数とは無限小数でかつ非循環小数ですから、それを有限長で置き換えてしまって生じる誤差と考えます。

実際、

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ で左辺と右辺等しいですよ。}$$

それを 1.414 で置き換えると、

$$\frac{1}{1.414} = \frac{1.414}{2} \text{ となり、この左辺と右辺の関係から、}$$

$2 = 1.414 \times 1.414 = 1.999369$ が得られますが、等式は成り立っていません。ですから、求め方によって値が変わるのだと考えます。もし解答に 0.707 を要求するのであれば、解を有限小数の形で答えなさい等の工夫が必要でしょうね?お粗末でした。