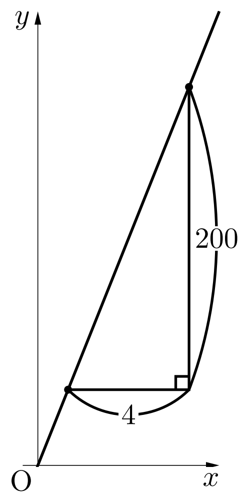
速さ 50m/分の一定の速さで走る遊具があるとする。この遊具の x 分後の道のりを ym とするとき, $y = 50x$ という関係が成り立つ。これをグラフにすると, 右の図のようになる。このとき, 1 分 ($x = 1$) から 5 分 ($x = 5$) までの平均の速さを求めると, $x = 1$ のとき, $y = 50$, $x = 5$ のとき, $y = 250$ であるから,



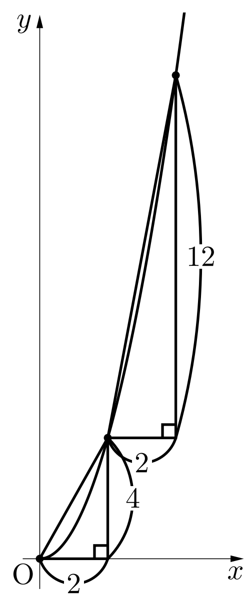
$$\text{平均の速さ} = \frac{\text{道のり}}{\text{かかった時間}} = \frac{250-50}{5-1} = \frac{200}{4} = 50(\text{m/分})$$

となる。もちろん速さが一定だから, 平均しても速さは 50m/分になるのは当たり前といえば, それまでだが。ここで肝心なことは上で求めた式はまさに

$$\frac{y\text{ の増加量}}{x\text{ の増加量}} = \text{変化の割合} = 2\text{ 点間の線分の傾き}$$

つまり, この場合の変化の割合は 2 点 (1, 50) と (5, 250) の 2 点間の傾きである。具体的に言えば, 200 m 進むのにかかった時間が 4 分だったので, 平均の速さは 200÷4=50 m/分となる。

では, 遊具が $y = x^2$ (x は時間 (単位は分), y は道のり (単位は m)) のように, 放物線を描く運動をする場合は平均の速さとはどうなるのであろうか。結論から言うと考え方は同じである。



$$\text{平均の速さ} = \frac{\text{道のり}}{\text{かかった時間}} = \frac{y\text{ の増加量}}{x\text{ の増加量}} = \text{変化の割合}$$

である。ここでいう変化の割合は 2 点を結ぶ線分の傾きを表すことをお忘れなく。例えば 0 秒からから 2 秒までの平均の速さは, $x = 0$ のとき, $y = 0$, $x = 2$ のとき, $y = 4$ であるから, 平均の速さは

$$\text{平均の速さ} = \frac{4-0}{2-0} = 2\,(\text{m/分}) \cdots ①$$

同様に, 2 秒から 4 秒までの平均の速さは

$$\text{平均の速さ} = \frac{16-4}{4-2} = 6\,(\text{m/分}) \cdots ②$$

となる。①の場合は, 2 点 (0, 0) と (2, 4) を結ぶ直線の傾き (傾き 2) が平均の速さを表し, ②の場合では, 2 点 (2, 4) と (4, 16) を結ぶ直線の傾き (傾き 6) が平均の速さを表すことになる。このことは, 仮に平均を求める 2 点が決まっているなら, その 2 点間で, 減速しようが, 加速しようが, 休憩しようが, 2 点間の平均は変わらないことを意味する。これは上の放物線の平均の考え方が簡単な例として挙げられる。

また, $y = ax^2$ (a は 0 でない定数) において, x の値が p から q の範囲における変化の割合は

$$\text{変化の割合} = a(p+q)$$

で与えられるので, これを利用するともっと簡単に得られる。

ではここで問題, 平均の理解を深める問題です。ある道のりを, 行きは時速 $4\,\mathrm{km}$ で進み, 帰りは時速 $5\,\mathrm{km}$ で進んだ。この時の平均の速さを求めなさい。あなたは時速何 km 答えますか。答えは次のページにあります。

時速 $\dfrac{40}{9}$ km　……(答)