変化の割合

(1) 変化の割合と平均変化率
変化の割合も平均変化率も同じで2点間の傾きを表す。この割合がどこをとっても一定の場合グラフは直線を描く。
一次関数 $y = ax + b (a \fallingdotseq 0, b = \text{定数})$ とし、x の変域を $p \leqq x \leqq q (p \fallingdotseq q)$ として、変化の割合が一定であることを示す。
$x = p$ のとき、$y = ap + b \cdots P(p, ap + b)$
$x = q$ のとき、$y = aq + b \cdots Q(q, aq + b)$
この2点 P, Q の傾きは、$\dfrac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}$ を使って、次のようになる。

$$\frac{(aq + b) - (ap + b)}{q - p} = \frac{a\cancel{(q - p)}}{\cancel{(q - p)}} = a \cdots ①$$

①は x の変域 q, p に関係なく一定でその値は a になる。従って一次関数 $y = ax + b$ は直線になる。

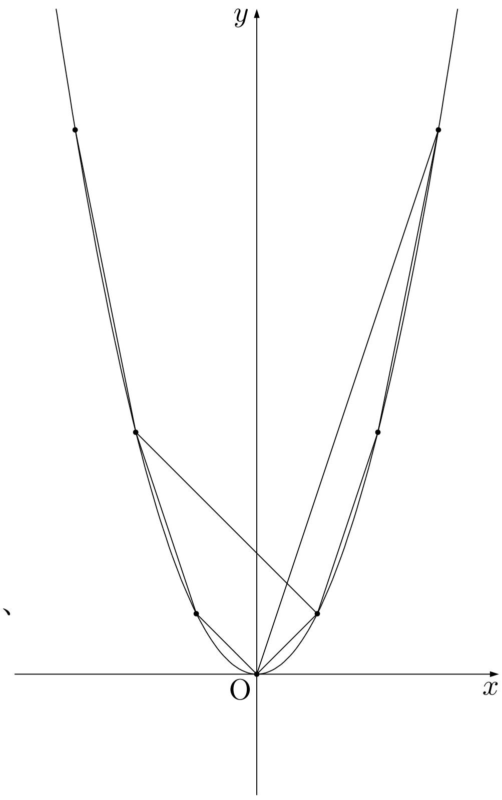
(2) 二次関数
二次関数の変化の割合を次の調べてみる。
二次関数を $y = ax^2 (a \fallingdotseq 0)$ として、先と同様、x の変域を $p \leqq x \leqq q (p \fallingdotseq q)$ とする。
$x = p$ のとき、$y = ap^2 \cdots P(p, ap^2)$
$x = q$ のとき、$y = aq^2 \cdots Q(q, aq^2)$
この2点間の傾きは、先と同様にすると

$$\frac{aq^2 - ap^2}{q - p} = \frac{a(q^2 - p^2)}{q - p}$$

$$= \frac{a(q + p)\cancel{(q - p)}}{\cancel{q - p}} = a(q + p) \cdots ②$$

②は x の変域の値 p, q によって変わる値で、
常に一定ではない。常に一定でないということは、
グラフは曲線を描く、これが放物線になるのである。
図1に関数 $y = x^2$ で、x が $-3 \leqq x \leqq 3$ の整数を取って直線で結んでみた。また (1,1)、(−2,4) の傾き、(0,0)、(3,9) の傾きを線分で表してみた。

図 $1y = x^2$ を直線で書く
破線は本来の放物線



(3) 反比例最後に変化の割合を $y=\dfrac{a}{x}(a \fallingdotseq 0, x>0)$ で調べてみる。

x の変域は同じく $p \leqq x \leqq q(p \fallingdotseq q)$ とする。

$x=p$ のとき、$y=\dfrac{a}{p}\cdots P(p,\dfrac{a}{p})$

$x=q$ のとき、$y=\dfrac{a}{q}\cdots Q(q,\dfrac{a}{q})$

同様にして、

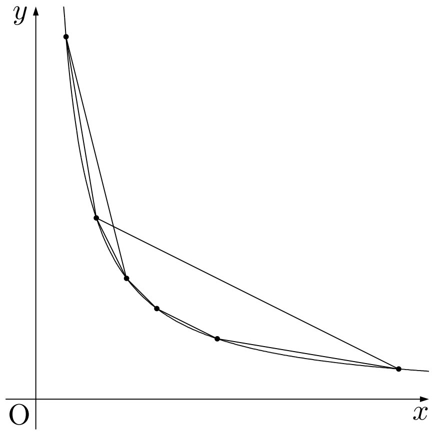
$$\frac{\dfrac{a}{q}-\dfrac{a}{p}}{q-p}=\frac{\dfrac{ap-aq}{pq}}{q-p}$$

$$=\frac{ap-aq}{pq(q-p)}=-\frac{a\cancel{(q-p)}}{pq\cancel{(q-p)}}=-\frac{a}{pq}$$

これも二次関数同様、x の変域の値 p,q によって変わる値で、常に一定でない。このことは反比例の式もまた曲線を描く。これが双曲線といわれるグラフである。図 2 に反比例 $y=\dfrac{12}{x}$ の正の部分を x,y ともに自然数の座標をとってそれを直線で結んでみた。

図 2 $y=\dfrac{12}{x}$ を直線で書く

破線は本来の双曲線



また $(1,12)$、$(3,4)$ の傾き、$(2,6)$、$(12,1)$ の傾きを線分で表してみた。