正方形の交点の軌跡

それぞれ x の n 乗に比例する関数 $y = ax^n (a > 0, x > 0)$ についてそのグラフと y 軸で囲まれる範囲にそのグラフの一点をとり、y 軸におろした垂線を 1 辺とする正方形を作っていく。このとき、正方形の対角線の交点はどのような図形を描くか考えてみる。

$n = 1$ においては $y = ax$ となり、正方形の対角線の交点の軌跡を求めると $y = (2a+1)x$ となり、比例の関数を描く。$n = 2$ においては、二次関数 $y = ax^2$ となり、正方形の対角線の交点は $y = 4ax^2 + x$ という二次関数を描く。$n = 3$ においては、三次関数 $y = ax^3$ となり、その軌跡は $y = 8ax^3 + x$ となった。$n = 4$ では四次関数となり、その結果は $y = 16ax^4 + x$ となる。以下おそらく n 次式の場合、y 軸と囲まれる部分にそのグラフ上の点を取って y 軸におろした垂線を 1 辺とする正方形を作るとき、その対角線の交点は $y = 2^n ax^n + x$($n = 1$ のときも成り立つ)$\cdots$㋐となると予想できる。

二次関数の場合を例にとって求める過程を示す。

二次関数 $y = ax^2$ 上の点を A とし、それを基準に反時計回りに正方形の頂点を B, C, D とする。点 A の x 座標を t とすると $A(t, at^2), B(t, at^2+t), C(0, at^2+t), D(0, at^2)$ となる。これより対角線の交点の座標 P は $P(\frac{t}{2}, \frac{2at^2+t}{2})$ と表せる。

ここで $x = \frac{t}{2} \cdots$①, $y = \frac{2at^2+t}{2} \cdots$②とおくと、

①より $t = 2x$

これを②に代入して、

$y = 4ax^2 + x$

となる。

これと同様の作業を $y = ax^n$ で行うことにより、㋐を得る。

図 1:比例 $y = ax$

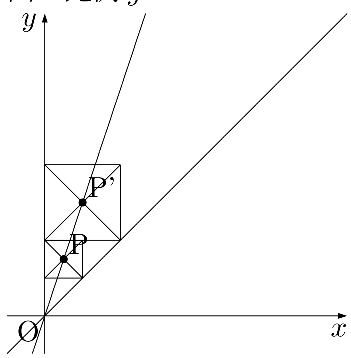


図 2:二次関数 $y = ax^2$

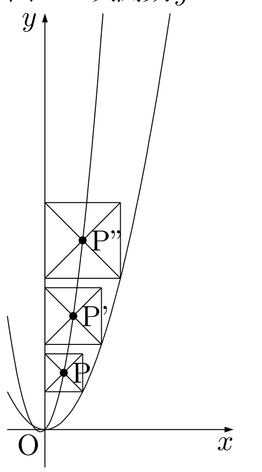
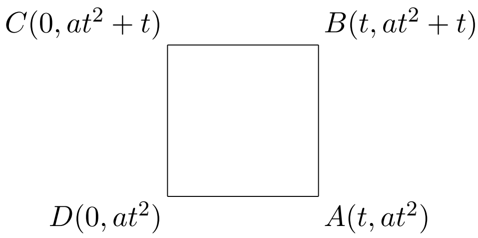


図 3 : 頂点の座標

$y = ax^2$



また反比例の式 $y = \dfrac{a}{x}(a > 0, x > 0)$ で同様のことを行った。この場合、双曲線と y 軸に挟まれた部分に正方形または 長方形を作っていき、その対角線の交点がどのような軌跡を描くか考える。
双曲線上の点を A とし、反時計回りに頂点をそれぞれ B, O, C とする (ただし O は原点)。A の x 座標を t とすると、$A(t, \dfrac{a}{t})$, $B(0, \dfrac{a}{t}), O(0,0), C(t,0)$ となる。できた長方形 (正方形) の対角線の交点の座標 P は、$P(\dfrac{t}{2}, \dfrac{a}{2t})$ となる。ここで、$x = \dfrac{t}{2}, y = \dfrac{a}{2t}$ とおくと、
$x \times y = \dfrac{t}{2} \times \dfrac{a}{2t}$
$xy = \dfrac{a}{4}$
$\therefore y = \dfrac{a}{4x}$
つまり反比例の場合は長方形 (正方形) の対角線の交点は、反比例の曲線を描き、その比例定数はもとの比例定数の $\dfrac{1}{4}$ になることが分かった。
ちなみに、この正方形を x 軸と挟まれる方で作ると、比例ではすっきりする値が得られたが、二次関数からはすっきりとした答えが得られなかった。以上長々と書きましたが、間違ってたらご指摘ください。質問はやめてください。(笑)

図 4:三次関数 $y = ax^3$

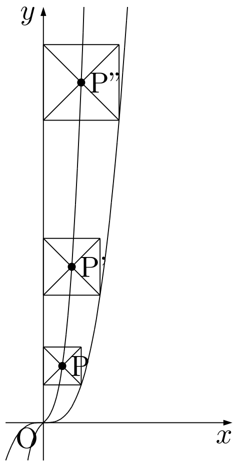


図 5 : 反比例 $y = \dfrac{a}{x}$

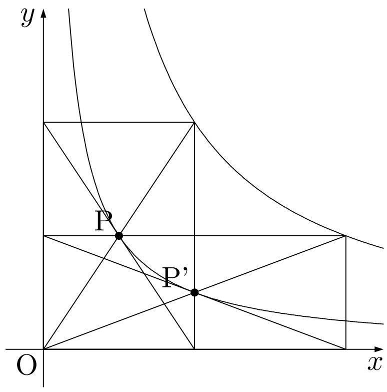


図 6 : 頂点の座標
$y = \dfrac{a}{x}$