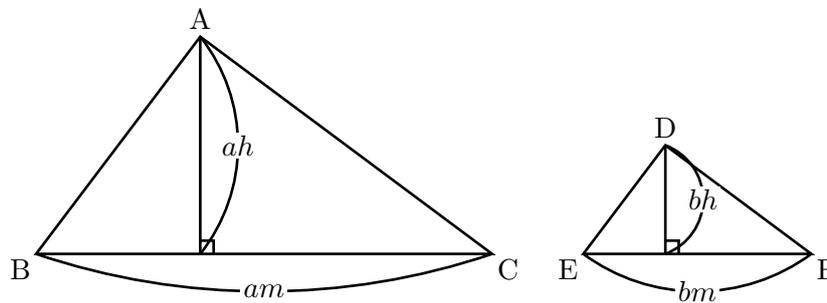


下の図のような $\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ があります。相似比は $a : b$ である。このとき、面積比が $a^2 : b^2$ となることを証明してみましょう。



以下三角形限定で証明させていただきます。 a, b を自然数, m, h を正の数とし相似比が $a : b$ の三角形の底辺である辺 BC, EF をそれぞれ am, bm , 頂点 A, D から底辺におろした高さを ah, bh とおく。(注: 相似比が $a : b$ ということは高さの関係も相似なのでその比は $a : b$ とおける) ここで $\triangle ABC, \triangle DEF$ の面積をそれぞれ S_1, S_2 とおくと,

$$S_1 = \frac{1}{2} \times am \times ah$$

$$= \frac{a^2mh}{2}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \times bm \times bh$$

$$= \frac{b^2mh}{2}$$

よって面積比 $S_1 : S_2$ は

$\frac{a^2mh}{2} : \frac{b^2mh}{2} = a^2 : b^2$ 従って、相似比が $a : b$ の三角形の面積比は $a^2 : b^2$ である。三角形なら、直角二等辺三角形が証明としてはやりやすい。また正方形や円を証明に用いれば、もっとすっきりする。他の多角形の場合はおそらく、三角形の組み合わせで証明できるんじゃないの? ということで今回三角形に特化して証明しました。