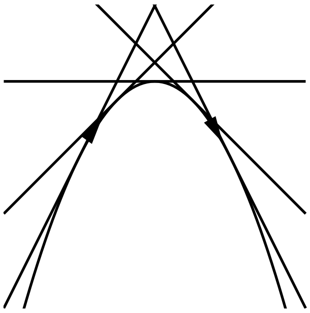
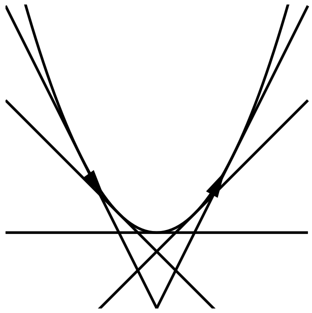
$f(x)$ の 2 次導関数 $f''(x)$って何を表すのでしょうか。基本的に $f''(x)=0$ となる点をそのグラフの変曲点といいます。$f'(x)$ が関数 $f(x)$ の増減を表します。ということは $f''(x)$ は $f'(x)$ の増減を表すということとして捉えておかしくはないでしょう。ここで $f'(x)$ は接線の傾きを表す変数です。下の左の図のように接線の傾きが矢印の方向に小さくなっています。すなわち $f''(x)$ の値が減少しているときは, グラフは上に凸になっています。同様に右の図では接線の傾きが矢印の方向に大きくなっています。すなわち $f''(x)$ の値が増加しているときは, グラフは下に凸になっています。ちょうど車で言うと S 字カーブをドリフトしているようなものでしょうか。変曲点はその S 字カーブでハンドルを切り替えるポイントのようなもの？じゃないでしょうか。



接線の傾きが小さくなっていっている



接線の傾きが大きくなっている

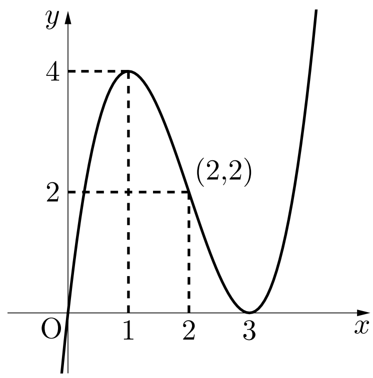
三次関数 $f(x)=x^3-6x^2+9x$ のグラフの増減表と変曲点を書いてみました。

$$f(x)=x(x-3)^2$$

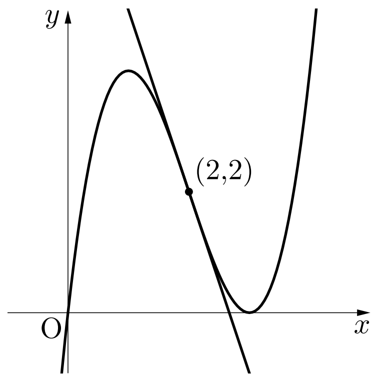
$$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$$

$$f''(x)=6x-12=6(x-2)$$

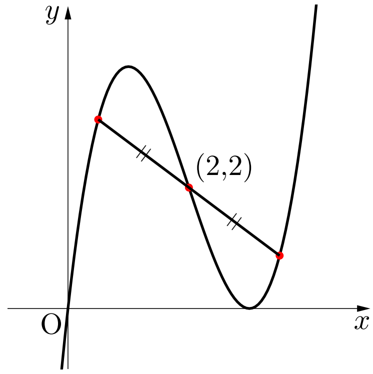
x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	変曲点	↘	極小	↗



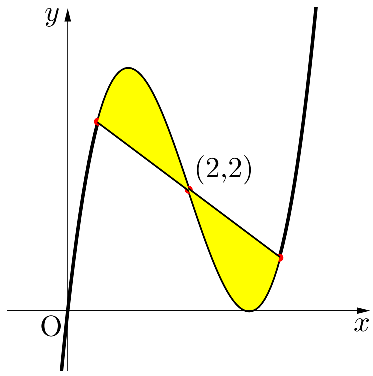
また, 変曲点における接線はグラフを突き抜けます。



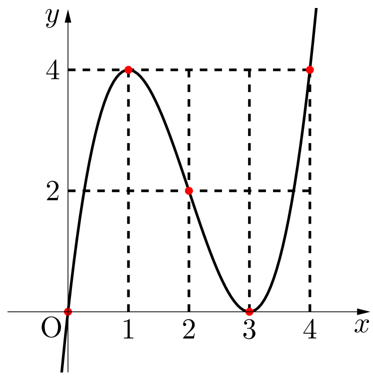
3 次関数のグラフは変曲点を対称の中心として点対称になっている。



3 次関数のグラフは変曲点を対称の中心として点対称になっているので，その点を通る直線と 3 次関数とで囲まれた図形の面積は等しい。



3 次関数が変曲点を中心に合同な長方形 8 つに分割でき，極値や変曲点はその角に位置する。



3 次関数に引ける接線の本数も決まってる。
黄色の領域の 1 点からは 3 本
白の領域の 1 点からは 1 本
もとのグラフ上の 1 点，変曲点における接線上の 1 点からは 2 本
の接線が引ける。