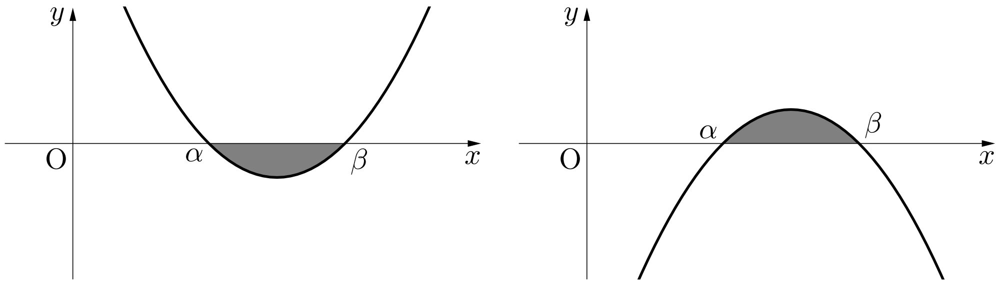
$$\int_\alpha^\beta a(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=\frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3$$

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta a(x-\alpha)(x-\beta)\,dx&=a\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\alpha+\alpha-\beta)\,dx\\&=a\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2+(\alpha-\beta)(x-\alpha)\,dx\\&=a\left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3+\frac{1}{2}(\alpha-\beta)(x-\alpha)^2\right]_\alpha^\beta\\&=a\left\{\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3+\frac{1}{2}(\alpha-\beta)(\beta-\alpha)^2\right\}\\&=a\left\{\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3-\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3\right\}\\&=-\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3\end{aligned}$$



結果にマイナスが付いているが, 通常面積を求める場合, $a>0$ なら上の左の図のようになり,

$$\int_\alpha^\beta \{0-a(x-\alpha)(x-\beta)\}\,dx=\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3$$

となる。同様に $a<0$ の場合もである。

したがって, これらを一般化したのが公式である。

2 次関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ と一次関数 $g(x)=mx+n$ によって囲まれる面積は, 2 つのグラフの交点を以下の方程式で求め

$ax^2+bx+c=mx+n$

$a(x-\alpha)(x-\beta)=0$ と変形でき,

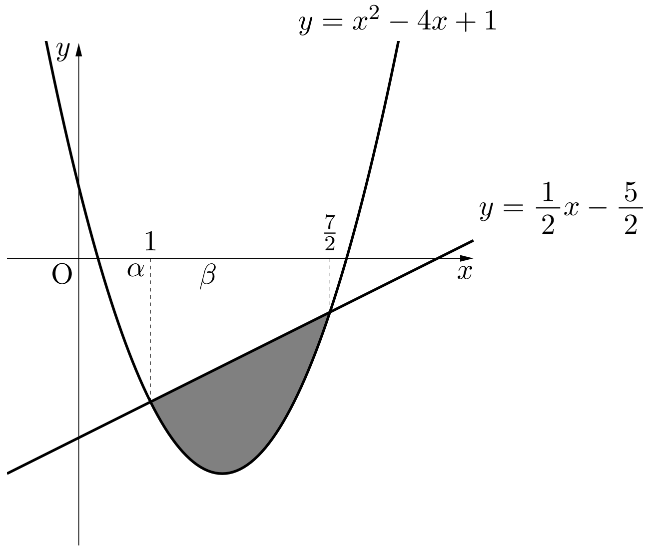
$\alpha,\beta(\alpha<\beta)$

とするとき,

$$\int_\alpha^\beta a(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=\frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3$$

である。

この公式は以下のような問題で役に立つ例題



直線 $y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{5}{2}$ と, 曲線 $y = x^2 - 4x + 1$ で囲まれる面積を求めなさい。

解法

求める面積 S は

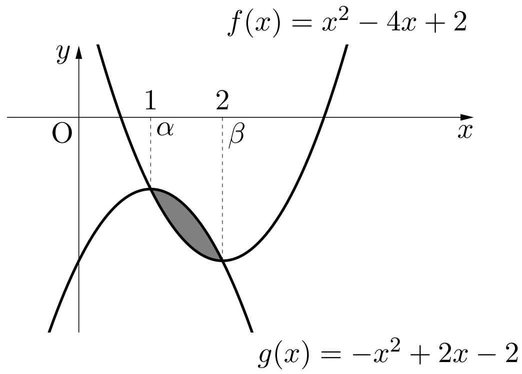
$$\begin{aligned} S &= \int_1^{\frac{7}{2}} \left\{ \left(\frac{1}{2}x - \frac{5}{2} \right) - (x^2 - 4x + 1) \right\} dx \\ &= -\int_1^{\frac{7}{2}} (x-1)\left(x - \frac{7}{2}\right) dx \\ &= \frac{1}{6}\left(\frac{7}{2} - 1\right)^3 \\ &= \frac{125}{48} \quad \cdots\cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

理屈は上だが, 答えだけなら, 単純に

$S = \dfrac{1}{6}(\dfrac{7}{2} - 1)^3 = \dfrac{125}{48}$

で求められる。

この公式は次のような問題でも使える。



例題

2 つの放物線 $f(x) = x^2 - 4x + 2, g(x) = -x^2 + 2x - 2$ で囲まれる面積を求めなさい。

解法

$f(x) = g(x)$ として, 交点を求めると,

$x^2 - 4x + 2 = -x^2 + 2x - 2$

$2x^2 - 6x + 4 = 0$

$2(x-1)(x-2) = 0$

$x = 1, 2$

したがって, 求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_1^2 \left\{ (-x^2 + 2x - 2) - (x^2 - 4x + 2) \right\} dx \\ &= -\int_1^2 2(x-1)(x-2)\, dx \\ &= \frac{2}{6}(2-1)^3 \\ &= \frac{1}{3} \quad \cdots\cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

答えだけなら, 単純に

$S = \dfrac{2}{6}(2-1)^3 = \dfrac{1}{3}$

で求められる。