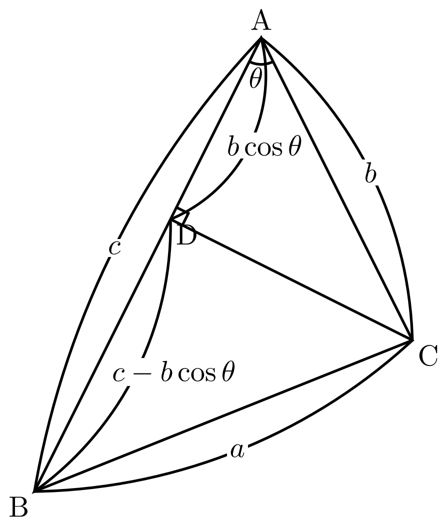
どうやって余弦定理ができるの?

余弦定理は中学3年生で習った三平方の定理の拡張版だと思ってください。三平方の定理は$\theta = 90^\circ$のときだけでしたが, 余弦定理ではθは$0 \leqq \theta \leqq 180^\circ$まで拡張できます。

次の余弦定理①を右の図を使って証明しましょう。

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\theta \cdots ①$$



△ABCで, ∠BAC $= \theta$とおき, 点Cから辺ABにおろした垂線と辺ABの交点をDとする。このとき, 右の図のように, AD= $b\cos\theta$, CD= $b\sin\theta$とおけ, BD= $c - b\cos\theta$となる。ここで, △BCDで三平方の定理を用いると,

$a^2 = (c - b\cos\theta)^2 + b^2\sin^2\theta$

$\quad = c^2 - 2bc\cos\theta + b^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta$

$\quad = c^2 - 2bc\cos\theta + b^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$

$\quad = b^2 + c^2 - 2bc\cos\theta \cdots$ (証明終)

今回はθは鋭角で行いましたが, 鈍角でも同じ結果が得られる。それを次のページに示しました。

続いて, θ が鈍角の場合

頂点 B から CA の延長線上に垂線を下ろして, 交点を D とする。このとき, 右図のように, AD= $c\cos(180^\circ - \theta)$, BD= $c\sin(180 - \theta)$ となります。ここで,

$$\sin(180^\circ - \theta) = \sin\theta,\ \cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta$$

である。これを適用し, $\triangle$BCD で三平方の定理を用いると,

$$\begin{aligned} a^2 &= (b - c\cos\theta)^2 + c^2\sin^2\theta \\ &= b^2 - 2bc\cos\theta + c^2\cos^2\theta + c^2\sin^2\theta \\ &= b^2 - 2bc\cos\theta + c^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) \\ &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\theta \cdots (\text{証明終}) \end{aligned}$$