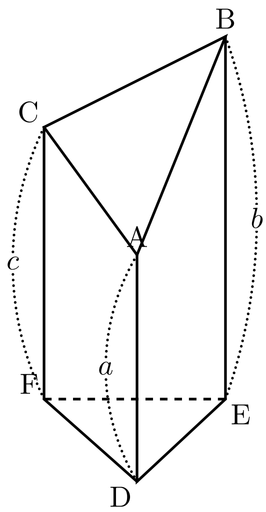
　立体の切断で覚えておいた方がいい式を書いておきましょう。右の立体 (三角柱を斜めに切ったもの) の体積 V は底面積を S とすると,

$$V = S \times \frac{a+b+c}{3}$$

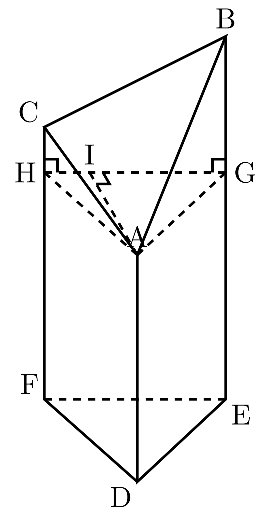
で与えられる。



　上の立体を下のように底面に平行な面で, 点 A を通る平面 AGH で切ると, 底面が台形 CHGB の四角錐 A−CHGB ができる。その高さを AI とすると, この四角錐の体積は

$$(\mathrm{CH}+\mathrm{BG}) \times \mathrm{HG} \times \frac{1}{2} \times \mathrm{AI} = (\mathrm{CH}+\mathrm{BG}) \times \mathrm{HG} \times \mathrm{AI} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$$
$$= \frac{1}{3}(\mathrm{CH}+\mathrm{BG}) \times \triangle\mathrm{DEF}$$

ある。



　ここで, 三角柱 AGH−DEF の体積は次のように書ける。

$$\triangle\mathrm{DEF} \times \mathrm{AD} = \triangle\mathrm{DEF} \times (\mathrm{AD}+\mathrm{GE}+\mathrm{HF}) \times \frac{1}{3}$$

これより, もとの立体 ABC−DEF の体積 V は三角柱 AGH−DEF+四角錐 A−CHGB で求まるので,

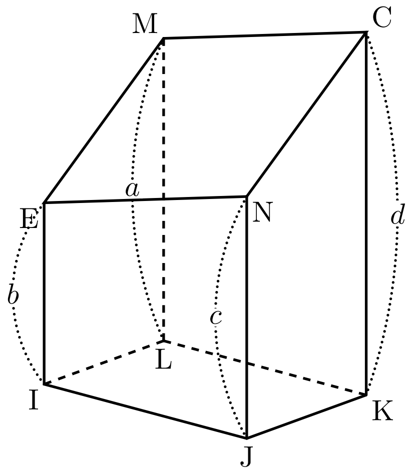
$$V = \frac{1}{3}(\mathrm{CH}+\mathrm{BG}) \times \triangle\mathrm{DEF} + \triangle\mathrm{DEF} \times (\mathrm{AD}+\mathrm{GE}+\mathrm{HF}) \times \frac{1}{3}$$
$$= \triangle\mathrm{DEF} \times \frac{1}{3}\{\mathrm{AD}+(\mathrm{BG}+\mathrm{GE})+(\mathrm{CH}+\mathrm{HF})\}$$
$$= S \times \frac{a+b+c}{3}$$

したがって, 最初の体積の公式が得られる。

右の立体 (直方体を斜めに切ったもの) の体積 V は底面積を S とすると,

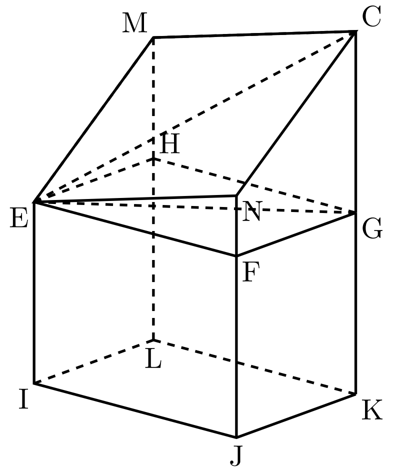
$$V = S \times \frac{a+b+c+d}{4}$$

で与えられる。



立体の切り口は平行四辺形になる。MC, EN は同一平面上にあり, 面 EIJN と面 MLKC は平行であるから, MC//EN, 同様に ME//CN だから 2 組の向かい合う辺がそれぞれ平行なので, 四角形 MENC は平行四辺形である。

先の立体を立体 CNEM−EFGH と直方体 EFGH−IJKL に分ける。そしてさらに立体 CNEM−EFGH を 2 つの切断された三角柱 EMC−EGH, ENC−EFG に分ける。EF= x, FG= y, MH= e,0(点 E)= f, NF= g, CG= h とする。このとき前のページにある切断された三角柱の公式を使うと,

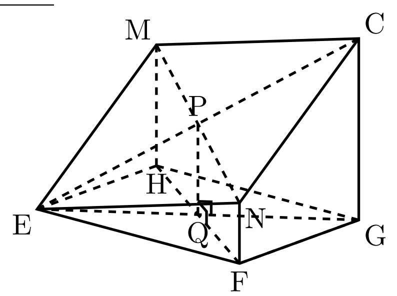


$$\text{立体 EMC} - \text{EGH} = xy \times \frac{1}{2} \times \frac{e+f+h}{3}$$

$$\text{立体 ENC} - \text{EFG} = xy \times \frac{1}{2} \times \frac{f+g+h}{3}$$

この 2 つを足すと立体 CNEM−EFGH が求まるので, 加えると

$$\begin{aligned}\text{立体 CNEM} - \text{EFGH} &= xy \times \frac{1}{2} \times \frac{e+f+h}{3} + xy \times \frac{1}{2} \times \frac{f+g+h}{3} \\ &= xy \times \frac{e+g+2f+2h}{6} \cdots ①\end{aligned}$$



ここで, 平行四辺形 MENC の対角線の交点を P, 長方形 EFGH の対角線の交点を Q とすると, それぞれ対角線の中点で交わるので, 線分 PQ は長方形 EFGH に垂直に交わる。このとき, 中点連結定理を用いると次の関係式が得られる。

$$\text{PQ} = \frac{e+g}{2} = \frac{f+h}{2}$$

つまり

$$e+g = f+h \cdots ②$$

である。①, ②より,

$$\text{立体 CNEM} - \text{EFGH} = xy \times \frac{e+g+2f+2h}{6}$$
$$= xy \times \frac{f+h}{2} \cdots (\alpha)$$
$$= xy \times \frac{2f+2h}{4} \quad \text{分子} = (f+h)+(f+h) = (e+g)+(f+h)$$
$$= xy \times \frac{e+f+g+h}{4} \cdots ③$$

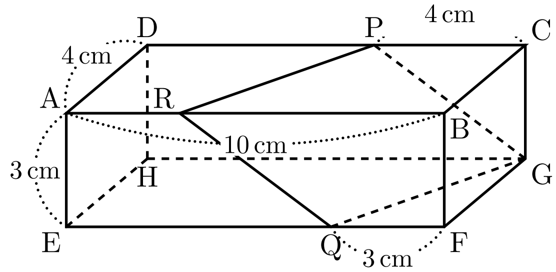
また直方体 EFGH−IJKL の体積は,

$$\text{直方体 EFGH} - \text{IJKL} = xy \times \text{EI}$$
$$= xy \times \frac{\text{EI+FJ+GK+HL}}{4} \cdots ④$$

であるから, ③,④より, もとの立体 MENC−IJKL は

$$\text{立体 MENC} - \text{IJKL} = \text{立体 CNEM} - \text{EFGH} + \text{直方体 EFGH} - \text{IJKL}$$
$$= xy \times \frac{e+f+g+h}{4} + xy \times \frac{\text{EI+FJ+GK+HL}}{4}$$
$$= xy \times \frac{(e\text{+HL}) + (f\text{+HJ}) + (g\text{+FJ}) + (h\text{+GK})}{4}$$
$$= xy \times \frac{a+b+c+d}{4}$$
$$= S \times \frac{a+b+c+d}{4}$$

【使用例】図のように, AB=10 cm, AD=4 cm, AE=3 cm の直方体がある。辺 CD 上に CP=4 cm となる点 P, 辺 EF 上に FQ=3 cm となる点 Q をとる。さらに, 辺 AB 上に点 R を 4 点 P, R, Q, G が同じ平面上にあるようにとると, 四角形 PRQG は平行四辺形となる。
このとき, (1)〜(3) の各問いに答えなさい。



(1) RQ の長さを求めなさい。

(2) RB の長さを求めなさい。

(3) 直方体 PRQG で 2 つの立体に分ける。その 2 つの立体のうち, 頂点 A を含む立体の体積を V_1, 頂点 B を含む立体の体積を V_2 とするとき, $V_1 : V_2$ を最も簡単な整数の比で表わしなさい。

〔佐賀〕

この佐賀県の (3) の問題は上の公式を使えば, 体積を求めることなく答えが出せる。
AR=3 cm, RB=7 cm であるから, $V_1 : V_2 = \dfrac{3+10}{2} : \dfrac{7+0}{2} = 13 : 7$ ……(答)
ここで, 直方体の場合, 向かい合っている高さを 1 組選んで平均をとればよい。これは上の (α) の式からも分かる。

【余談】2 ページの①式が得られるための条件は, 四角形を 1 本の対角線で区切った 2 つの三角形の面積が等しいことが必要である。つまり, (底辺)×(高さ) が等しいことが必要不可欠。ここでは底面が長方形であるから, 面積は等しくなる。底面が台形などでは対角線で区切ると 2 つの三角形の面積比は, (上底) : (下底) となり, 基本台形では上底と下底は異なるので, この公式は使えないということになる。この公式を理屈を知らずして乱発するのは誤答につながりそうだ。僕もやってしまいそうである (笑)。でもこの証明は面白かった。では。