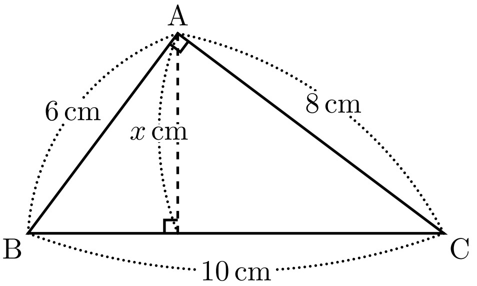
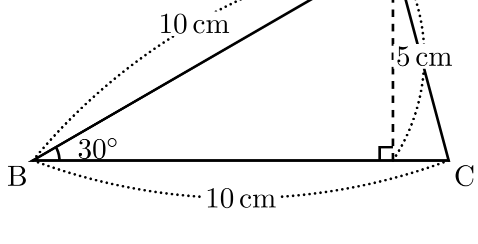
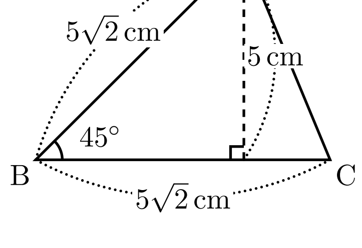
算数や数学の中くらいのレベルの問題や難問によく登場する技をご紹介します。以下に示す三角形の面積を 2 通りの表し方を用いる技です。例えば直角三角形 ABC があり直角を挟む 2 辺が 6cm, 8cm で斜辺が 10cm であるとき, 点 A から辺 BC に下ろした垂線の長さを求めなさい。
このような出題された時に, この垂線の長さを求めるのに相似を使う方がいると思います。ただ, 三角形の面積の求値式に目をつけると相似などという難しい技は必要ありません。すなわち以下の解法で垂線の長さ $x$cm を求めることが可能です。



$6 \times 8 = 10 \times x$
これを解いて,
$x = \dfrac{24}{5}$(cm)
を得る。実際 H24 入試で徳島県でも同様の問題が出題されている。次のページの問い (3) に出題されます。 ご確認ください。この手の解き方はよく出題されていると思います。ワンランク上を目指すのであれば, きちんと抑えておきましょう。

また, 三角形の面積で頂角 30° や 45° の二等辺三角形の面積の求め方は抑えておくべきでしょう。以下にそれを書いておきます。





[問い] 図 1, 図 2 のように, 関数 $y = \dfrac{1}{2}x^2$ のグラフ上に 2 点 A$(-4,\ 8)$, B$(2,\ 2)$ がある。(1)〜(3) に答えなさい。

(1) 図 1 について, (a)·(b) に答えなさい。

(a) 2 点 A, B を通る式を求めなさい。

(b) △AOB の面積を求めなさい。

(2) 図 2 のように, 点 C$(0,\ 8)$, 点 D$(-4,\ 0)$ とし, この放物線上に x 座標が t である点 P をとる。△APC の面積と △APD の面積比が $13 : 8$ になるときの t の値を求めなさい。ただし, $-4 < t < 2$ とする。

(3) 図 2 において, y 軸を対称の軸として, 点 A を対称移動した点を E とし, 点 B を中心とする半径 2 の円に点 E から接線をひき, その接点の一方を Q とするとき, △BQE を線分 BE の周りに 1 回転してできる立体の体積を求めなさい。ただし, 円周率は π とします。

図 1

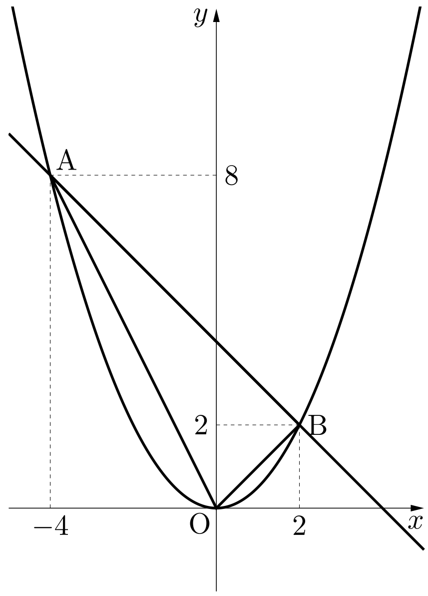
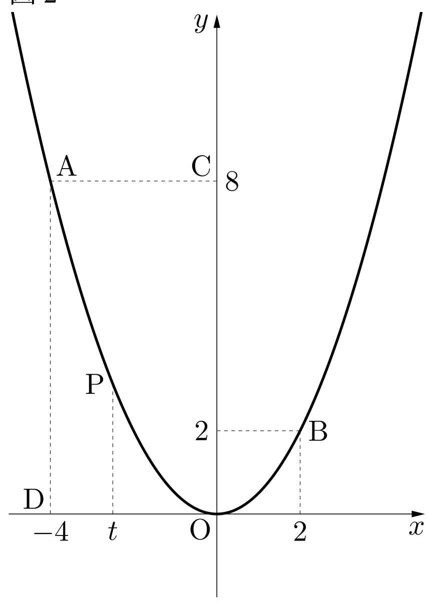


図 2



〔H25 徳島〕

(1) (a) A$(-4, 8)$, B$(2,\ 2)$ より, 直線 AB の式は $y=-x+4$

(b) $(2+4)\times 4\div 2=12$

(2) $\triangle\mathrm{APC}=4\times\left(8-\dfrac{t^2}{2}\right)\times\dfrac{1}{2}=16-t^2$

$\triangle\mathrm{APD}=8\times(t+4)\times\dfrac{1}{2}=4t+16$

問題より,

$(16-t^2)\ :\ (4t+16)=13\ :\ 8$

$52t+208=128-8t^2$

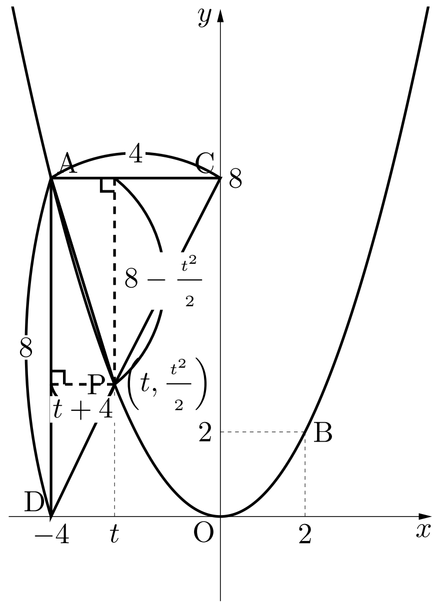
整理して,

$8t^2+52t+80=0$ 両辺 4 で割って, $2t^2+13t+20=0\cdots$①

解の公式を用いて①を解くと,

$t=-4,\ -\dfrac{5}{2}$

t の範囲は $-4<t<2$ であるから, $t=-\dfrac{5}{2}$



(3) E$(4,\ 8)$ で接線の 1 つを EQ($x=4$: y 軸に平行な直線) を選ぶとする。このとき, 三角形 BQE は $\angle\mathrm{EQB}=90^\circ$ の直角三角形で, 直角をはさむ二辺は EQ$=6$, BQ$=2$ である。また, この 2 辺を用いて, 斜辺 EB を三平方の定理により求めると, EB$=2\sqrt{10}$ であり, EB を底辺としたときの高さを x とすると, 三角形 BQE の面積を 2 通りで表すことが可能になる。すなわち,

$6\times 2\times\dfrac{1}{2}=2\sqrt{10}\times x\times\dfrac{1}{2}$

これを解いて

$x=\dfrac{3\sqrt{10}}{5}\cdots$① この①が BE を軸として回転させたときにできる立体 (2 つの円錐を組み合わせた立体) の半径になる。従って求める体積は

$\dfrac{3\sqrt{10}}{5}\times\dfrac{3\sqrt{10}}{5}\times\pi\times 2\sqrt{10}\times\dfrac{1}{3}$

$=\dfrac{12\sqrt{10}}{5}\pi(cm^2)$