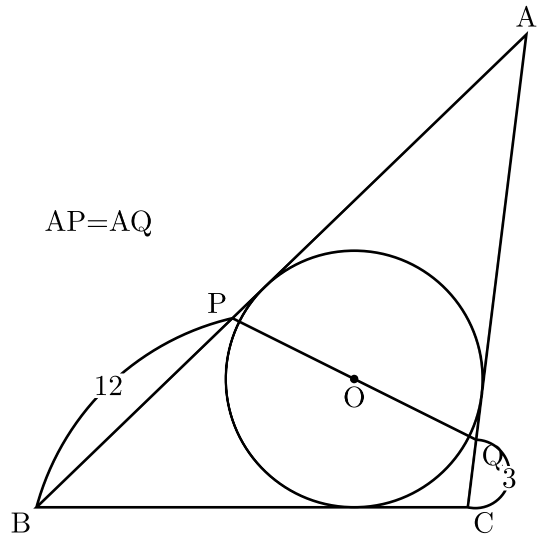
【983 回】



上の図のような, O を中心とする円に外接する三角形 ABC があります。

いま, AP=AQ となる点 P, Q を, 辺 AB 上, 辺 AC 上にとったところ, 線分 PQ は円の中心 O を通りました。

BP=12 cm, CQ=3 cm であるとき, PQ の長さは何 cm であるかを求めてください。

〔cm〕

新中 2N.K.

AB と円 O の接点を D、AC と円 O の接点を E とする

AD = AE AP = AQ より、PD = QE ∠ PDO =∠ QEO DO = EO

よって、△ PDO と△ QEO は二辺夾角相等で合同

∴PO = QO

∴∠ AOP =∠ AOQ = 90 °

∠ DAO =∠ EAO = α　∠ DBO =∠ CBO = β　∠ ECO =∠ BCO = γ とおくと、

2 α + 2 β + 2 γ = 180 °

よって、α + β + γ = 90 °

このとき、△ AOQ において、α + 90 °+∠ AQO = 180 °なので

∠ AQO =∠ APO = β + γ

また、∠ AQO = γ +∠ COQ ∠ APO = β +∠ BOP(∵外角の定理) なので

∠ COQ = β ∠ BOP = γ

よって、△ COQ と△ OBP は二角相等で相似

ここで、PO = QO = X とおくと

3:X = X:12

よって、$X^2 = 36$

∴X = PO = QO = 6

PQ = 12　　(終)

uchinyan

AP = AQ，円の対称性より，△ APQ は AP = AQ の二等辺三角形，PO = QO，PQ = PO * 2，で，

∠ APQ = ∠ AQP = (180 °- ∠ BAC)/2 = ((∠ BAC + ∠ ABC + ∠ ACB) - ∠ BAC)/2 = ∠ ABC/2 + ∠ ACB/2,

∠ BPQ = 180 °- ∠ APQ = 180 °- ∠ AQP = ∠ CQP，がいえます。

さらに，△ ABC が 円 O に外接するということは，円 O は △ ABC の内接円，ということで,

やはり円の対称性より，BO は ∠ ABC の二等分線，CO は ∠ ACB の二等分線，となり,

∠ PBO = ∠ ABC/2，∠ QOC = ∠ AQP - ∠ QCO = (∠ ABC/2 + ∠ ACB/2) - ∠ ACB/2 = ∠ ABC/2,

そこで，∠ PBO = ∠ QOC，となり，∠ BPQ = ∠ CQP，と合わせて，△ PBO ∽ △ QOC，がいえます。

これより，PB：PO = QO：QC，PB = 12 cm，QC = 3 cm，PO = QO，なので,,

12：PO = PO：3，PO * PO = 12 * 3 = 36，PO = 6，PQ = PO * 2 = 6 * 2 = 12 cm,

になります。