【995 回問題】

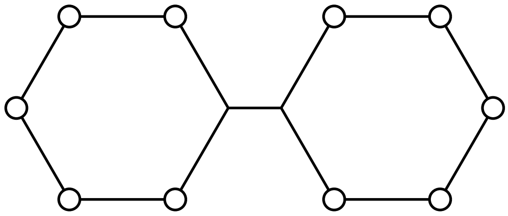

図 1

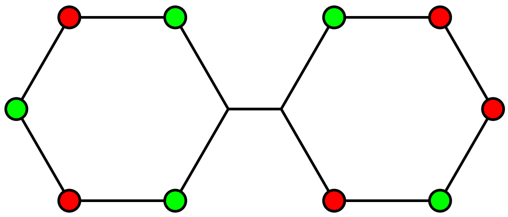

図 2

上の図 1 のような, 13 本の竹ひごと 10 個の粘土でできたオモチャがあります。このオモチャは, 正六角形が 2 個つながった形をしており, 上下対称かつ左右対称になっています。

いま, 10 個の粘土に, 赤または緑のいずれかの色を塗ることにします。赤に塗る粘土の個数と緑に塗る粘土の個数は異なっても構いません。(すべて赤, すべて緑, も OK です)

このとき, 異なる粘土の塗り方は何通りあるでしょうか。ただし, 回転したり, ひっくり返したりして, 同じになるものについては, 1 通りと数えるものとします。　〔288 通り〕

ベルク・カッツェ

今回はちょっとがんばりました。

赤が 0 の場合は 1 通り

赤 1 の場合は 3 通り

赤 2 の場合は 15 通り

赤 3 の場合は 3-0 と 2-1 で 6+26 = 32 通り

赤 4 の場合は 4-0、3-1、2-2 で 3+26+31 = 60 通り

赤 5 の場合は 5-0、4-1、3-2 で 1+13+52 = 66 通り

赤 0 から 4 を 2 倍して赤 5 の分を足して 288 通り。

J ママ

こんばんは

冷静に考えたら解けました

位置を固定して考えると 10ヶ所を塗り分けるのは 2＾10 通り

このうち

左右対称の塗りかたは 2＾5 通り

これは上下に返す (回転しても同じ) 形を含むので実質半分

上下対称の塗りかた 2＾6 通り

これは左右に返す (回転しても同じ) 形を含むので実質半分
回転対称の塗りかた 2＾5 通り
これは上下 (左右も同じ) に返す形を含むの実質半分
左右対称かつ上下対称のものは必ず回転対称などより
左右かつ上下かつ回転対称のみ考えると塗りかたは 2＾3 通り
2＾10 通りのうち、左右、上下、回転いずれの対称でもないものは
ベン図より、2＾10-2＾5-2＾6-2＾5+2＾3+2＾3=912 通り
これは１つの形を上下に返す、左右に返す、回転させるとできる形を重複しているので
実質 1/4 の 912/4=228 通り
lake
変換の仕方が
動かさない、左右反転、上下反転、左右・上下反転 (=180 °回転) の 4 種類で
動かさないで盤面が変化しないのが 1024 通り
左右反転で盤面が変化しないのが 32 通り
上下反転で盤面が変化しないのが 64 通り
左右・上下反転で盤面が変化しないのが 32 通り
(1024+32+64+32)/4 = 288
288 通りが答えとなりました
上の lake さんの解法の uchinyan さんによる補足
赤緑のパターンの対称性により異なる重複度をそろえて一気に除く解法。
なるほど，この手がありましたね。先に重複を除くことばかり考えてうっかりしました。
ただ，ちょっと分かりづらいかも知れないので補っておきましょうか。
この図には，そもそも，左右対称，上下対称，180 °の回転対称の３つの対称性がありますが，
これらのどの２つの対称移動操作を行っても３つ目の対称移動操作が現れます。
そこで，これ３つの対称移動操作，左右反転，上下反転，180 °の回転，によって移り合う赤緑のパターンは８つではなく最大でも４つです。
これを重複度ということにすると，次のとおりになっており，これですべてです。
a：対称性の全くないパターンの重複度は 4,
b：左右対称だけをもつパターンの重複度は 2,
c：上下対称だけをもつパターンの重複度は 2,
d：回転対称だけをもつパターンの重複度は 2,
e：２つ＝すべての対称性をもつパターンの重複度は 1。
これらの重複度の表現を記号として，(a,b,c,d,e)，と表すことにします。
それぞれの位置に重複度が書かれますが，そもそも該当しない場合は重複度はないので 0 とします。
ここまで準備しておいて，
すべてのパターン，2＾10 = 1024 通り，a, b, c, d, e が含まれ，重複度は (4,2,2,2,1),
左右対称のパターン，2＾5 = 32 通り，b, e が含まれ，重複度は (0,2,0,0,1),
上下対称のパターン，2＾6 = 64 通り，c, e が含まれ，重複度は (0,0,2,0,1),
回転対称のパターン，2＾5 = 32 通り，b, e が含まれ，重複度は (0,0,0,2,1),

そこで，これら４つを足すと，重複度は (4,4,4,4,4) となって，a, b, c, d, e のすべてが 4 になります。

これより，重複を除くには 4 で割ればよく，

$(1024 + 32 + 64 + 32)/4 = 1152/4 = 288$ 通り，

が答えになります。

なかなかうまいですね。

また，すべての対称性をもつ $2 \wedge 3 = 8$ 通りが表に現れないのも面白いです。